



RESSONÂNCIA: UMA REVISÃO CONTEXTUALIZADA – PRIMEIRA PARTE

Marco Valério Miorim Villaça¹

Resumo: É provável que o fenômeno da ressonância mecânica seja conhecido pela humanidade desde 4.500 a.C., sendo descrito claramente por Galileu apenas no início do século XVII. Na primeira metade do século XIX, as pesquisas inovadoras de Savary e Henry sobre a natureza oscilatória da descarga da garrafa de Leyden lançaram as bases para o estudo do fenômeno da ressonância elétrica. Atualmente, os circuitos ressonantes são elementos essenciais das tecnologias de uso cotidiano. Eles são usados para determinar a frequência de operação de transmissores e receptores, para permitir a seleção de estações de radiodifusão, na amplificação de tensão, em dispositivos biomédicos, no aquecimento indutivo, em circuitos osciladores, em filtros e para obter conversão de energia com alta eficiência, dentre outras não citadas e não menos importantes aplicações da eletrônica. A ressonância pode, entretanto, ser prejudicial ao funcionamento dos circuitos eletroeletrônicos ao originar oscilações indesejadas persistentes e transitórias causando ruídos, distorção de sinal e possíveis danos aos elementos do circuito. Nos cursos de circuitos elétricos, o estudo da ressonância é geralmente limitado aos circuitos RLC série e paralelo com componentes concentrados ideais. A primeira parte deste artigo iniciará com uma apresentação de uma seleção de acontecimentos históricos relacionados com o fenômeno da ressonância. Na sequência, apresentar-se-á o conceito físico de ressonância e será feita uma análise qualitativa da ressonância RLC e uma análise quantitativa da topologia clássica RLC série, que será estendida por dualidade, na segunda parte do artigo, para a configuração paralela clássica. A análise completa das estruturas clássicas vai, ainda, permitir uma comparação futura com os resultados da análise quantitativa dos circuitos RLC série e paralelo com componentes não ideais.

Palavras-chave: Ressonância. História da tecnologia. Teoria de circuitos elétricos.

Abstract: *It is probable that the phenomenon of mechanical resonance has been known to mankind since 4.500 B.C., being clearly described by Galileo only at the beginning of the 17th century. In the first half of the 19th century, the groundbreaking research of Savary and Henry about the oscillatory nature of the discharge of the Leyden jar laid the foundation for the study of the phenomenon of electrical resonance. Today, resonant circuits are essential elements of everyday use technologies. They are used to set the operating frequency of transmitters and receivers, to pick up the frequencies of broadcasting stations, in voltage amplification, in biomedical devices, in inductive heating, in oscillator circuits, in filters, and to get energy conversion with high-efficiency, among other unmentioned and no less important applications of electronics. Resonance can, however, be detrimental to the operation of electrical and electronic circuits by causing unwanted persistent and transient oscillations, which can cause noise, signal distortion and possible damage to the circuit elements. In electrical circuit classical courses, the study of resonance is usually limited to the RLC series and parallel circuits with ideal components. The first part of this article will begin with a presentation of a selection of historical events related to the resonance phenomenon. Subsequently, the physical concept of resonance will be presented and a qualitative analysis of the RLC resonance and a quantitative analysis of the classic RLC series topology, which will be broadened by duality, in the second part of the article, to the classical parallel topology. The complete analysis of the classical structures will also allow a future comparison with the results of the quantitative analysis of the RLC series and parallel circuits with non-ideal components.*

Keywords: *Resonance. History of technology. Electrical circuits theory.*

¹ Professor do Departamento Acadêmico de Eletrônica (DAELN), IFSC/Florianópolis <mvillaca@ifsc.edu.br>.

1 INTRODUÇÃO

A ressonância é caracterizada como a amplificação seletiva de um estímulo externo com uma frequência que corresponde à frequência natural de vibração do sistema. Segundo Dimarogonas (1990, p. 181), Pitágoras (570 a.C. – 496 a.C.) provou experimentalmente que a frequência natural de sistemas vibratórios é uma propriedade do sistema e que não depende da magnitude da oscilação. Dimarogonas informa, ainda, que o pêndulo como um dispositivo de medição de vibração, e provavelmente tempo, era conhecido na antiguidade, esclarecendo que “essas referências não são conclusivas, no entanto, porque não há muitas referências ao pêndulo na antiguidade. Pode-se supor que o pêndulo era conhecido; na verdade, o balanço (que é um pêndulo composto) era conhecido em 4.500 a.C.” (DIMAROGONAS, 1990, p. 183, tradução nossa).

Segundo Baker (2011, p. 4) uma das primeiras manifestações científicas práticas conhecidas do pêndulo remonta à dinastia Han Oriental, na China (25 – 220 d.C.). No ano de 132, um brilhante polímata do governo, Zhang Heng (張衡) construiu um sismômetro, chamado “候風地動儀”¹ (YAN e HSIAO, 2007), para atender à necessidade de relatórios rápidos e direcionais dos terremotos. Embora o dispositivo original de Heng não exista mais², supõe-se que dentro de um recipiente havia um pêndulo invertido que era sensível ao movimento do terremoto, conforme é representado no modelo da Figura 1. Um terremoto abala o recipiente, causando um ligeiro deslocamento entre o pêndulo e o recipiente. Esse movimento é transmitido através de alavancas para empurrar uma bola em uma de oito direções possíveis. O instrumento deveria ser sensível ao sinal desejado e, ao mesmo tempo, indiferente aos indesejados. Para um pêndulo, o ponto ótimo está na frequência de ressonância:

“O tamanho do recipiente, cerca de 1,8 metro, foi uma escolha casual. Era do tamanho certo para ressoar e, portanto, detectar sinais de sub-áudio de um terremoto distante. Através de uma série de alavancas, o movimento do pêndulo faria com que uma bola saísse de uma das cabeças de dragão no recipiente e entrasse na boca de um dos oito sapos de metal que circunscravam o recipiente. Cada sapo foi posicionado em um dos oito pontos da bússola. A posição do sapo escolhido indicava a direção aproximada do terremoto. Heng receberia seus dados direcionais em tempo hábil e a ajuda às vítimas poderia ser enviada na direção geral do terremoto” (BAKER, 2011, p. 5, tradução nossa).

Figura 1 – Modelo do sismômetro de Heng, cortado para mostrar o mecanismo interno. As ondas de choque que chegam deslocam um pêndulo ligado a um mecanismo que abre as mandíbulas do dragão voltado para a direção do terremoto. Uma bola cai dos dentes do dragão na boca de um sapo para registrar o evento. (SCIENCE MUSEUM GROUP, 2023).



¹ Em pīnyīn (transliteração do Mandarim): *Hou Feng Di Dong Yi*, traduzido como “instrumento de movimento de vento e solo”.

² Esse tipo de máquina antiga que está documentada, mas cujo o artefato foi perdido, é classificada como “tecnologia antiga perdida”.

Os princípios mecânicos que possibilitariam uma alta sensibilidade ao instrumento de Heng são detalhados por Sleswyk e Sivin (1981).

Para Truesdell (1960 p. 34), a oscilação forçada e a ressonância tiveram suas primeiras aparições claras na literatura científica na obra de Galileu intitulada “*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*” publicada em 1638. Galileu enfatiza que o período de oscilação de um pêndulo era completamente definido pela sua configuração e não poderia ser modificado por qualquer influência externa:

“Antes de tudo, deve-se observar que cada pêndulo tem seu próprio tempo de vibração tão definido e determinado que não é possível fazê-lo mover-se com qualquer outro período que não aquele que a natureza lhe deu. Pois que alguém agarre o cordão ao qual o peso está preso e tente, o quanto quiser, aumentar ou diminuir a frequência de suas vibrações; será tempo perdido” (GALILEU, 1954, p. 97, tradução nossa).

Sob um aspecto, essa observação não está totalmente errada, conforme destaca Bleck-Neuhaus (2018, p. 13). De fato, um pêndulo mostra oscilações com sua frequência natural se for acionado por impulsos curtos separados por longas pausas. Porém, o período da oscilação forçada não é estritamente definido pela frequência natural do pêndulo, mas pela frequência de repetição dos impulsos. A outra afirmação de Galileu, porém, é incorreta; se for aplicado um estímulo periódico senoidal adequado, um pêndulo pode oscilar na frequência desejada, conforme mostrou Thomas Young (1807) quase duzentos anos após os primeiros relatos de Galileu sobre o dispositivo. O equívoco de Galileu, aparentemente, adequava-se à sua crença de que as marés são um fenômeno decorrente dos movimentos da Terra, não sendo impulsionadas pela força da Lua. Em sua obra de 1632, “*Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico e copernicano*”, falando sobre o tema, Galileu critica respeitosamente Kepler:

“Mas de todos os grandes homens que filosofaram sobre esse efeito admirável da natureza, Kepler é o que me causa maior espanto, por ter ele, que é de engenho livre e agudo, e que tinha em mãos os movimentos atribuídos à Terra, dado ouvido e assentimento ao predomínio da Lua sobre a água, a propriedades ocultas e semelhantes infantilidades” (GALILEU, 2001, p. 536).

Galileu oferece, na mesma obra de 1638, uma descrição do que seria chamado hoje o fenômeno da ressonância:

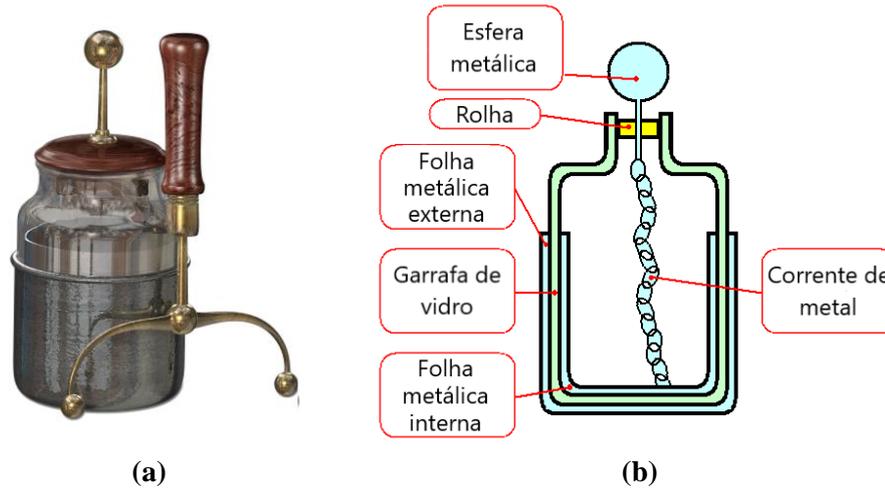
“Uma corda que foi tocada começa a vibrar e continua o movimento enquanto se ouve o som; essas vibrações fazem com que o ar imediatamente circundante vibre e estremeça; então essas ondulações no ar se expandem para o espaço e atingem não apenas todas as cordas do mesmo instrumento, mas mesmo aquelas de instrumentos vizinhos” (GALILEU, 1954, p. 98, tradução nossa).

A Garrafa de Leyden (Figura 2), criada por E. Georg von Kleist na Alemanha e Pieter van Musschenbroek na Holanda em 1745, é um dispositivo capaz de acumular uma grande quantidade de carga elétrica por meio do processo de indução e é a invenção precursora dos capacitores utilizados atualmente em circuitos elétricos. Quando a esfera metálica na haste da garrafa de Leyden é colocada próxima a uma fonte de energia estática, a folha metálica (placa) interna fica carregada e, devido às propriedades isolantes do vidro (dielétrico), uma carga igual e oposta se forma na folha externa. A garrafa pode armazenar essa carga até que seja descarregada, conectando-se a esfera metálica a um caminho condutor. O conhecimento do dispositivo rapidamente se espalhou pelos laboratórios em todo o mundo, permitindo a elaboração de diversos experimentos que foram essenciais para o desenvolvimento da ciência da eletricidade.

Felix Savary, em 1826, foi o primeiro a notar a descarga oscilatória de uma garrafa de Leyden conectada a um indutor. Savary observou que uma agulha de aço magnetizada pela corrente de descarga da garrafa de Leyden nem sempre tinha a mesma polaridade:

“Assim, numa série de experimentos em que as agulhas foram colocadas a distâncias do fio que aumentavam em intervalos iguais, no ponto de contato com o fio a agulha foi magnetizada positivamente, a uma pequena distância negativamente; um pouco mais longe, não adquiriu nenhum magnetismo; a uma distância um pouco maior que essa, exibiu magnetismo positivo; e esse efeito continuou por um certo intervalo, além do qual a magnetização foi novamente negativa. Quando ainda mais remoto, foi positivo, e continuou assim por todas as distâncias maiores que foram tentadas. Portanto, a ação parece ser periódica em relação à distância em que é exercida” (ROGET, 1831, p. 56).

Figura 2 – (a) Garrafa de Leyden (MAGNETIC ACADEMIC, 2023) e (b) seu diagrama (modificada de DUNN,2023).



A garrafa de Leyden foi carregada por uma fonte de corrente contínua e, naturalmente, esperava-se uma descarga de corrente contínua. Em uma apresentação à *French Academy of Sciences*, Savary sugeriu que o resultado fosse devido a descarga oscilatória da garrafa:

“É o movimento da eletricidade durante a descarga, composto, ao contrário, por um conjunto de oscilações, transmitido do fio para o meio circundante, e logo amortizado pelas resistências que aumentam rapidamente com a velocidade absoluta das partículas agitadas? Todos os fenômenos conduzem a essa hipótese, que na verdade depende não apenas da intensidade, mas do sentido do magnetismo seguindo as leis pelas quais pequenos movimentos são amortizados no fio, no meio que o envolve, [e] na substância que recebe e conserva a magnetização. [...] Um pêndulo oscilante em uma atmosfera [...] é um exemplo desse gênero de movimento [...]” (SAVARY, 1826, p. 31, tradução nossa).

Quinze anos mais tarde, Joseph Henry observou o mesmo efeito que Savary, investigando a corrente induzida em condutores adjacentes ao condutor de descarga da garrafa de Leyden. Para determinar a direção da corrente induzida ele observou a polaridade de uma pequena agulha de aço imantada pela corrente. Ao descrever seu experimento à *American Philosophical Society* em 1842, ele concluiu que “o fenômeno exige que admitamos a existência de uma descarga principal em uma direção, e então várias ações reflexas para frente e para trás, cada uma mais fraca do que a anterior, até que o equilíbrio seja obtido...” (HENRY, 1886, p. 201, tradução nossa).

Em 1847, Hermann von Helmholtz, em uma apresentação à *Physical Society of Berlin* sobre a conservação de energia, discutiu a descarga da garrafa de Leyden, afirmando que: “[...] a descarga de uma bateria não é um simples movimento da eletricidade em uma direção, mas um movimento para frente e para trás entre os revestimentos, em oscilações que se tornam continuamente menores até que a ‘força viva³’ seja destruída pela soma das resistências” (HELMHOLTZ, 1853, p. 43, tradução nossa).

Em 1853, Sir William Thomson, conhecido como Lord Kelvin, no artigo “*On transient electric currents*”, tratou matematicamente a descarga de um capacitor através de um condutor. No processo, Thomson (1853) reconheceu o efeito da indutância (para ele “capacidade eletrodinâmica”) e formulou uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução confirmava o comportamento experimental do circuito. Ele descobriu que a solução depende da relação entre os valores de capacitância, indutância e resistência, sendo que sob certas condições não há oscilação (caso super-amortecido) e, em outras circunstâncias, a oscilação é amortecida.

Antes, em 1739, segundo Bistafa (2022, p. 207), Euler foi o primeiro a formular a equação diferencial (não amortecida) do oscilador harmônico simples sob excitação harmônica. No final do seu artigo “*De novo genere oscillationum*”, Euler cita o fenômeno da ressonância, estabelecendo que sob certas condições “a amplitude da oscilação eventualmente cresce até o infinito: esse efeito é mais notável, uma vez que é gerado por forças finitas” (EULER, 1750, p.148, tradução nossa).

³ No original – “vis viva”. Na ciência, *vis viva*, definida em latim como “força viva”, em contraste com *vis mortua*, ou seja, “força morta”, foi uma precursora da energia cinética.

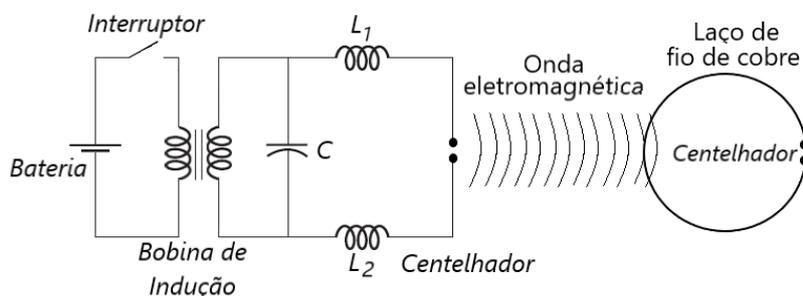
Segundo Bleck-Neuhaus (2018, p. 25), o primeiro autor a associar a palavra ressonância às oscilações eletromagnéticas foi o físico alemão Anton Oberbeck em seu artigo de 1885 “*Ueber eine der Resonanz ähnliche Erscheinung bei electricischen Schwingungen*”, onde ele afirmou que na ressonância elétrica encontram-se as mesmas equações e fenômenos presentes em qualquer outro tipo de ressonância. Oberbeck foi o primeiro a registrar a curva de ressonância, na forma de tabelas de dados da amplitude da corrente induzida em um circuito LC em diferentes frequências:

“A série de observações apresentadas confirma consistentemente as observações feitas no início. Em cada linha as deflexões apresentam um máximo bem caracterizado à medida que o número de oscilações aumenta. Sua localização depende da natureza do caminho da corrente e da capacitância do capacitor. Ao aumentar o tamanho desse último (linhas 7, 8, 9 em comparação com 4, 5, 6), o máximo é deslocado para o lado do menor número de oscilações. O mesmo deslocamento ocorre quando autoindução for aumentada pela introdução de rolos (de fio) enquanto o capacitor permanece o mesmo. O aumento da resistência não tem influência significativa” (OBERBECK, 1885, p.2 49, tradução nossa).

Encerrando o breve histórico acerca das primeiras observações e estudos sobre o fenômeno da ressonância, pode-se afirmar que o ápice de nossa resenha ocorreu em 1887, quando o físico alemão Heinrich Hertz (1893, p 29-53) demonstrou em uma série de experimentos, descritos no artigo “*On very rapid electric oscillations*”, que existem ondas eletromagnéticas que se comportam de maneira muito semelhante à luz, conforme proposto pelo físico escocês James Maxwell (1865).

A montagem experimental de Hertz, representada em sua versão atual na Figura 3, compreendia um transmissor e um receptor. O transmissor era composto por uma bobina de indução e duas esferas metálicas ou placas conectadas por fios de cobre a um mecanismo centelhador. A bobina de indução tinha como finalidade carregar o capacitor formado pelas esferas até que a tensão de ruptura do *gap* fosse alcançada. Quando o centelhador inicia a condução, as esferas juntamente com os fios de cobre formam um circuito ressonante paralelo, produzindo uma oscilação senoidal amortecida. Hertz argumentou que, se as previsões de Maxwell estivessem corretas, ondas eletromagnéticas seriam transmitidas durante cada série de centelhas. Para confirmar isso, Hertz fez um receptor simples usando um laço de fio de cobre e um mecanismo centelhador, colocando-o a alguns metros do receptor. Na Figura 4 são apresentados o transmissor e o receptor experimentais de Hertz.

Figura 3 – Esquemático de uma versão atual do experimento de Hertz.



Em um dos seus experimentos para gerar e detectar ondas eletromagnéticas, Hertz obteve os dados para, segundo Bleck-Neuhaus (2018, p. 25), plotar as primeiras curvas de ressonância publicadas:

“Nas experiências acima, a ressonância foi garantida alterando o coeficiente de autoindução e a capacidade de circuito primário, bem como a capacidade do circuito secundário. Os experimentos a seguir mostram que uma alteração do coeficiente de autoindução do circuito secundário também pode ser utilizado para esse fim. Foi preparada uma série de retângulos abcd nos quais os lados ab e cd foram mantidos com o mesmo comprimento, mas os lados ac e bd foram feitos de fios com comprimento variando de a 10 cm a 250 cm. Um máximo registrado para a distância da centelha era aparente quando o comprimento do retângulo era 1,8 m. Para se ter uma ideia das relações quantitativas, medi as faíscas mais longas que apareceram em vários comprimentos do circuito secundário. A [Figura 5] mostra os resultados. As abscissas representam o comprimento total do circuito induzido e as ordenadas o comprimento máximo da centelha. Os pontos indicam os valores observados” (HERTZ, 1893, p. 45).

Figura 4 – Dispositivos (a) transmissor e (b) receptor de Hertz. A bobina de indução não aparece na Figura (SPARK MUSEUM, 2023).

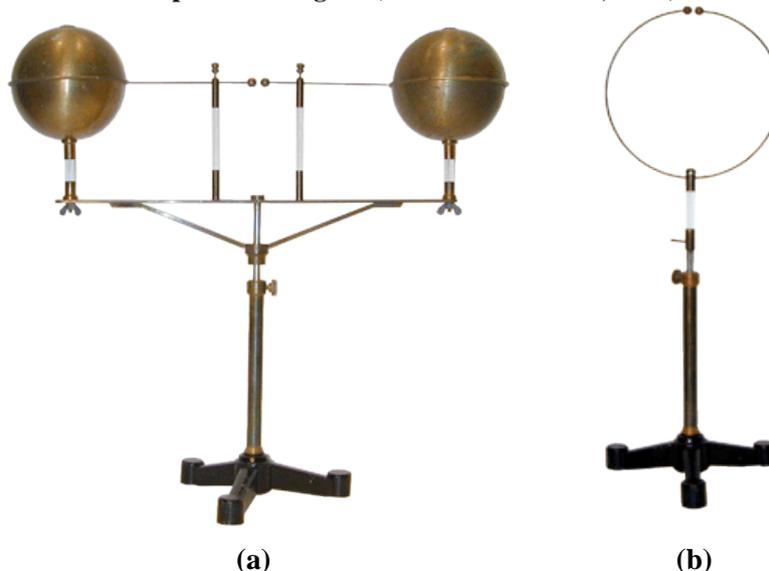
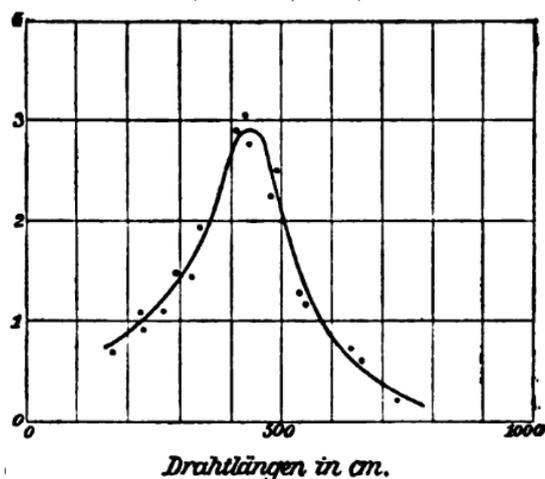


Figura 5 – Curva de ressonância de Hertz, as abcissas representam o comprimento do circuito secundário em cm e as ordenadas o comprimento máximo da centelha em mm (HERTZ, 1893).



Antes dos experimentos de Hertz, vários cientistas (DARRIGOL, 2000) fizeram contribuições significativas para a compreensão da ressonância eletromagnética. Em abril de 1820, o físico dinamarquês Hans Christian Ørsted constatou a conexão entre eletricidade e magnetismo ao demonstrar que uma corrente elétrica poderia mover a agulha de uma bússola. Pouco depois, em setembro de 1820, o francês André-Marie Ampère formulou sua lei ligando a corrente ao campo magnético gerado. Os experimentos envolvendo eletricidade e magnetismo feitos por Ørsted e Ampère, continuaram com os cientistas ingleses Joseph Henry e Michael Faraday. Em 1831, Faraday demonstrou que um campo magnético variável no tempo poderia induzir uma corrente elétrica em um condutor próximo. Henry havia descoberto a indução eletromagnética de forma independente em 1830, mas seus resultados não foram publicados até ele receber notícias do trabalho de Faraday.

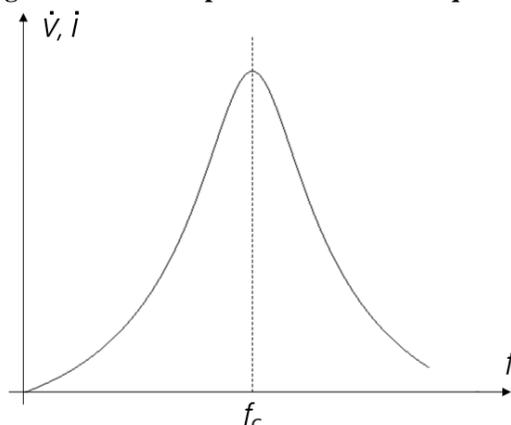
2 ANÁLISE QUALITATIVA DA RESSONÂNCIA

A descoberta das ondas eletromagnéticas por Heinrich Hertz, bem como seu uso na telegrafia sem fio por Guglielmo Marconi a partir de 1895, deram à ressonância eletromagnética grande importância na ciência e na tecnologia. Os circuitos ressonantes são essenciais na operação de uma vasta variedade de sistemas eletroeletrônicos usados diariamente. Eles são uma combinação dos elementos resistor (R), indutor (L) e capacitor (C) e podem ser encontrados em filtros para selecionar uma faixa específica de frequências, em geradores de formas de onda, em sistemas de comunicação para filtrar frequências indesejadas e extrair o sinal

desejado para processamento posterior, em dispositivos de transferência de energia sem fio⁴ para aparelhos eletrônicos de consumo e veículos elétricos, em equipamentos de aquecimento indutivo, em conversores de energia de alta frequência, em equipamentos biomédicos etc.

Os circuitos ressonantes RLC apresentam uma curva de resposta em frequência semelhante à mostrada na Figura 6, onde é possível observar a variação do seu comportamento em função da frequência. Observe na figura que a resposta v ou i , conforme o caso, será máxima na frequência igual a f_c , diminuindo progressivamente à medida que se afasta dessa frequência, tanto à direita quanto pela esquerda. Quando a resposta do circuito é máxima ou muito próxima da máxima, diz-se que ele está em ressonância.

Figura 6 – Resposta em frequência típica de um circuito RLC, ou seja, a representação gráfica de sua resposta a diferentes frequências de um sinal.



Um receptor de radiodifusão apresenta uma curva de resposta para cada emissora similar a apresentada na Figura 6. Quando o receptor está sintonizado em uma determinada estação, ele está ajustado na frequência f_c ou suficientemente próximo a ela. O sinal das emissoras que transmitem em frequências muito à direita ou à esquerda dessa frequência não entra com uma amplitude suficiente para interferir na emissora de interesse. O comportamento detalhado acima é o motivo para os circuitos ressonantes serem conhecidos também como circuitos sintonizados.

Portanto, a ressonância é caracterizada como a amplificação seletiva de uma fonte externa, denominada fonte de excitação, cuja frequência ou frequências correspondem às características oscilatórias naturais do sistema ressonante.

A ressonância, conforme foi exposto anteriormente, não é um fenômeno exclusivo dos sistemas eletroeletrônicos. Em geral, a ressonância ocorre sempre que há algum tipo de vibração ou onda presente. Portanto, existem vários tipos de ressonância, incluindo as ressonâncias mecânica, acústica, óptica, orbital e atômica. O exemplo mais familiar de dispositivo mecânico ressonante é o pêndulo simples. Ele consiste em uma massa presa a um fio flexível e inextensível em uma de suas extremidades e livre na outra. Quando a massa é afastada da posição equilíbrio, o pêndulo, após ser solto, realiza oscilações. Nesse movimento oscilatório existirá sempre uma transformação entre a energia cinética e a energia potencial gravitacional do sistema. A amplitude do movimento será a distância entre a posição de equilíbrio e a posição extrema ocupada pela massa que oscila. A única energia necessária para manter um pêndulo em movimento é a degradada no atrito com o ar.

Se uma estrutura mecânica for submetida a uma força externa periódica cuja frequência coincida com uma das frequências naturais, a amplitude da oscilação atingirá valores elevados que podem levar ao colapso da estrutura. A ponte de Tacoma Narrows foi uma ponte pênsil, ou seja, sustentada por cabos, construída em Washington, EUA, que entrou em colapso em 7 de novembro de 1940, apenas quatro meses após a sua

⁴ O carregamento sem fio ressonante, apesar de ser menos eficiente que o carregamento indutivo, não requer que o transmissor e o receptor estejam se tocando fisicamente, permitindo a transferência de energia a partir de uma distância proximal flexível do transmissor. O carregamento ressonante permite, também, o carregamento simultâneo de dispositivos de diferentes tamanhos e requisitos de energia. A ideia em si existe há mais de um século: em 1891, o famoso inventor sérvio Nikola Tesla realizou a transmissão sem fio de energia usando indução eletrostática a partir de uma bobina de indução de alta tensão (MILLER, 2014).

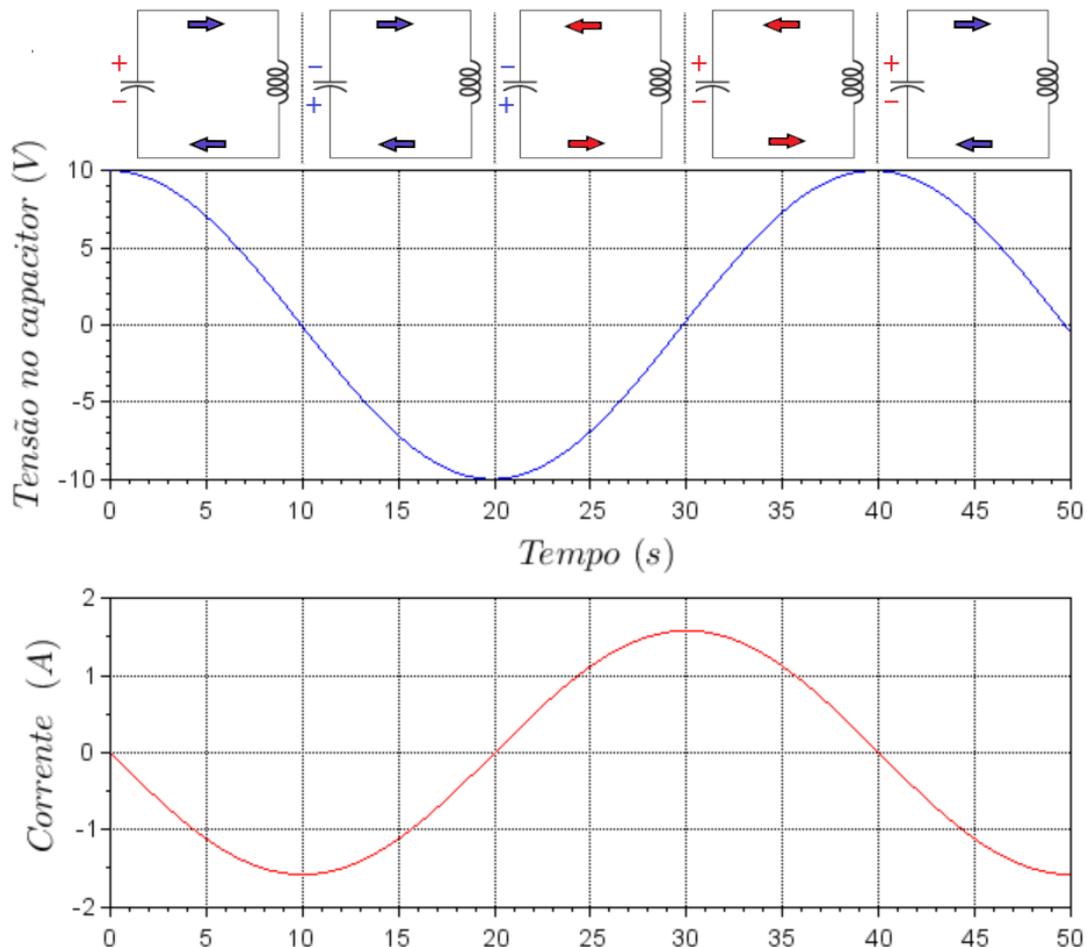
inauguração. Alguns físicos atribuem a queda à capacidade destrutiva do fenômeno de ressonância⁵, ocasionado por fortes rajadas de vento que provocaram oscilações na estrutura.

A palavra ressonância deriva diretamente do termo latino *resonantia*, significando “um eco”, sendo a sua raiz latina *resonare*, significando “soar novamente”, “soar de volta”. Sua etimologia, portanto, remete à ressonância acústica, um subconjunto da ressonância mecânica, onde os sistemas ressonantes podem ser cordas, tubos, cavidades, corpos de instrumentos de madeira etc. A maioria desses corpos ressonantes apresentará múltiplas frequências naturais, muitas vezes relacionadas harmonicamente, que eles amplificam, embora algumas frequências possam ser amplificadas em maior grau do que outras. Se uma fonte de excitação produz frequências fora das frequências de ressonância do sistema, nenhuma amplificação ocorre, essencialmente atenuando essas frequências em comparação com aquelas que são amplificadas. Na realidade, muitos instrumentos de corda apresentam uma ressonância acústica, baseada no ar, e uma mecânica, nas cordas e madeira, que se combinam para conferir ao instrumento seu som peculiar, já que a madeira e o ar podem produzir um conjunto diferente de frequências ressonantes.

Uma troca contínua de energia similar à descrita para o pêndulo simples ocorre no circuito ressonante LC. Os capacitores armazenam energia na forma de um campo elétrico e manifestam essa energia armazenada como um potencial, ou seja, uma diferença de potencial. Os indutores armazenam energia na forma de campo magnético e manifestam essa energia armazenada como um movimento cinético de elétrons, ou seja, uma corrente elétrica. Se o capacitor ou o indutor começarem carregados, os dois componentes trocarão energia entre si, indo e voltando como um pêndulo, criando seus próprios ciclos de tensão e corrente alternadas.

Imagine um indutor que seja conectado a um capacitor pré-carregado. A Figura 7 apresenta o comportamento da tensão no capacitor e da corrente no indutor a partir do instante da conexão.

Figura 7 – Evolução da tensão no capacitor e corrente no circuito após a conexão de um capacitor previamente carregado com um indutor.



⁵ Atualmente, acredita-se que a queda foi ocasionada pelo fenômeno de *flutter* aero elástico, que, simplificada, trata-se de uma auto excitação aerodinâmica sendo resultante de uma combinação de efeitos elásticos, inerciais e aerodinâmicos (BILLAH e SCANLAN, 1991).

A energia armazenada no campo eletrostático do capacitor começa a ser transferida para o campo magnético gerado pelo fluxo de corrente no indutor. A tensão no capacitor começa a decrescer, enquanto a corrente no indutor aumenta. Quando a tensão no capacitor se anula em $t = 10$ s, a corrente atinge o valor máximo e passa a diminuir. Apesar do capacitor estar descarregado, a corrente continua a fluir porque o indutor não permite que ela mude repentinamente para zero. De fato, o indutor começa a gastar sua reserva de energia para manter a corrente na mesma direção. A energia armazenada no campo magnético do indutor passa a carregar o capacitor com polaridade oposta até que, em $t = 20$ s, quando o indutor tem a sua energia esgotada, a tensão no capacitor atinge o seu máximo valor negativo, momento a partir do qual ela passará a diminuir em valor absoluto. Agora, o circuito se encontra em uma condição muito semelhante à inicial: o capacitor com carga máxima, porém com polaridade contrária, e corrente nula no circuito. O capacitor começa a transferir a energia armazenada em seu campo elétrico para o indutor e a corrente passa a circular na direção oposta durante meio ciclo. Próximo a $t = 30$ s, a tensão no capacitor atinge zero volt, deixando o indutor totalmente carregado. O indutor mantém a corrente na mesma direção, porém uma corrente decrescente, pois a sua reserva de energia está sendo transferida para o capacitor. Próximo a $t = 40$ s, o capacitor estará novamente totalmente carregado; a tensão estará novamente em seu pico positivo e a corrente em zero. Isso completa um ciclo da troca de energia entre o capacitor e o indutor. Se o circuito LC for ideal, a oscilação será mantida indefinidamente. A frequência dessa oscilação depende apenas dos valores de capacitância e indutância, não interessando a tensão (ou corrente) inicial a que foram submetidos. Essa propriedade de manter uma frequência única e natural, independentemente da energia armazenada, confere aos circuitos LC um significado especial. Se o circuito LC não for ideal, essa oscilação continuará com diminuição de amplitude a cada ciclo devido às perdas de energia nas resistências inerentes ao circuito, até cessar completamente. Esse sistema com uma resistência elétrica incorporada é chamado de amortecido e oscila até parar com uma frequência menor que a sua frequência natural, que será tanto menor, quanto maior for o amortecimento. Tal como acontece com o pêndulo, a única energia exigida pelo circuito ressonante para manter a oscilação é aquela quantidade desperdiçada pelo equivalente elétrico do atrito, que é a resistência.

Em física, esse tipo de oscilação periódica de um sistema mecânico é chamado de Movimento Harmônico Simples (MHS). Os mesmos princípios subjacentes governam tanto a oscilação de um circuito LC quanto a ação de um pêndulo, por isso a semelhança do comportamento. É uma propriedade interessante de qualquer pêndulo que seu período de oscilação é governado pelo comprimento da corda, não dependendo do peso da massa. É por isso que um pêndulo mantém a sua frequência de oscilação à medida que as oscilações diminuem de amplitude; a taxa de oscilação é independente da quantidade de energia armazenada no sistema. O mesmo vale para o circuito LC; a taxa de oscilação é estritamente dependente dos valores de capacitância e indutância, não sendo afetada pela amplitude da tensão (ou corrente) a cada ciclo.

Qualquer circuito elétrico com uma combinação de resistores, capacitores e indutores tenderá a apresentar um determinado comportamento quando a frequência da fonte de alimentação CA se aproximar da sua frequência natural. Se a frequência da fonte de alimentação para um circuito corresponder exatamente à frequência natural resultante da configuração do circuito, o circuito estará na condição de ressonância. Nessa condição, os elementos reativos trocam energia apenas entre si, ou seja, exceto pelas perdas resistivas no sistema, a fonte não precisa fornecer energia para nenhum deles. Assim, a ressonância é precisamente definida como a condição em um circuito RLC na qual a corrente resultante está em fase com a tensão aplicada, ou seja, o circuito se apresenta para a fonte como uma impedância puramente resistiva.

3 RESSONÂNCIA SÉRIE IDEAL

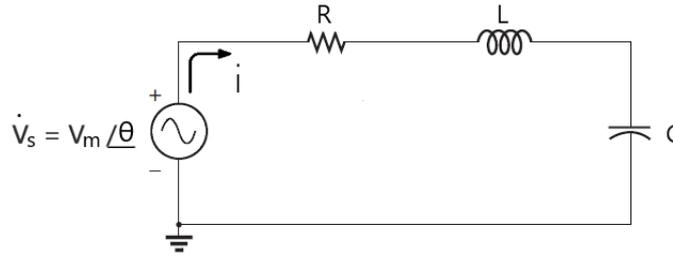
Considere o circuito da Figura 8, no qual um resistor R , um indutor L e um capacitor C estão conectados em série com uma fonte de tensão senoidal de amplitude V_m . Sua impedância de entrada é

$$\dot{Z}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (1)$$

A representação da Equação 1 na forma polar é

$$\dot{Z}(j\omega) = Z \left| \underline{\varphi} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right| \underline{\text{arc tg} \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)/R \right]} \quad (2)$$

Figura 8 – Circuito RLC série ideal.



A ressonância ocorre quando a reatância vale zero, ou seja, quando na Equação 1

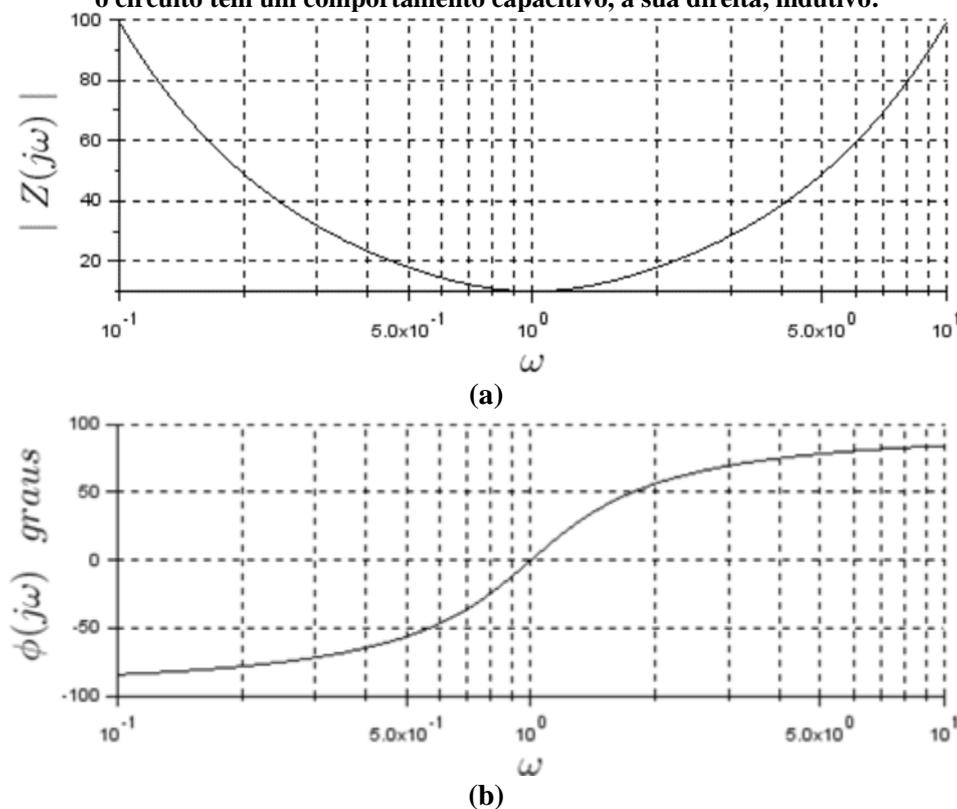
$$\omega L - 1/\omega C = 0 \quad (3)$$

A frequência ω que satisfaz a equação acima é denominada frequência de ressonância ω_0 . Resolvendo a Equação 3 para $\omega = \omega_0$, resulta

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \text{ (rad/s)} \quad (4)$$

A Figura 9 ilustra o comportamento da impedância do circuito RLC série em função da frequência ω em escala logarítmica, com $R = 10 \Omega$, $L = 10 H$ e $C = 0,1 F$. Em $\omega = \omega_0$, a magnitude da impedância apresenta o seu valor mínimo $Z = R$. Ou seja, a impedância é puramente resistiva e, dessa forma, a associação série LC se comporta como um curto-circuito na ressonância. Perceba que as tensões sobre o indutor e o capacitor não são nulas, elas são iguais em magnitude, porém estão defasadas em 180° , gerando uma tensão nula nos terminais da associação. A magnitude de \dot{Z} aumenta quando ω aumenta ou diminui a partir de ω_0 . Como $X_L > X_C$ quando $\omega > \omega_0$ e $X_L < X_C$ quando $\omega < \omega_0$, a fase de \dot{Z} é positiva quando $\omega > \omega_0$ e negativa quando $\omega < \omega_0$.

Figura 9 – (a) Magnitude e (b) fase da impedância $Z(j\omega)$ em função da frequência ω em escala logarítmica para o circuito série da Figura 8, com $R = 10 \Omega$, $L = 10 H$ e $C = 0,1 F$. À esquerda da frequência da ressonância, o ponto de mínima impedância, o circuito tem um comportamento capacitivo, à sua direita, indutivo.

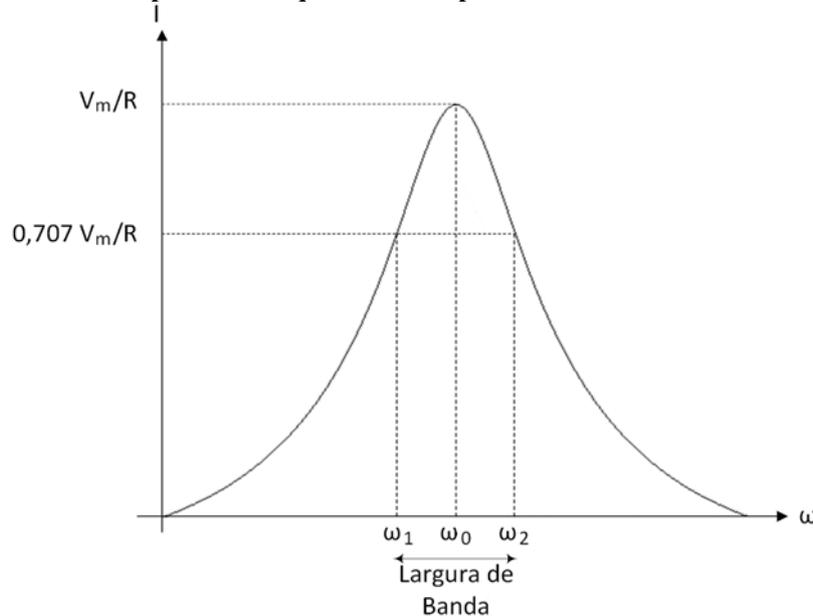


A resposta em frequência da magnitude da corrente do circuito ressonante série

$$I = |I(j\omega)| = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (5)$$

é mostrada na Figura 10. Nela se representa a largura de banda B , definida como a diferença entre as frequências ω_1 e ω_2 , onde a potência dissipada pelo circuito cai para a metade da potência máxima dissipada no circuito. Essas frequências são chamadas de frequências de meia potência, frequências de corte ou frequências de banda.

Figura 10 – A resposta em frequência da amplitude da corrente do circuito série.



Para o circuito RLC série na ressonância, as reatâncias se cancelam, submetendo o resistor a tensão máxima V_m . Então, a corrente na ressonância

$$I_0 = V_m/R \quad (6)$$

é a máxima corrente que circula pelo circuito.

Os indutores e os capacitores são frequentemente descritos com uma figura de mérito chamada fator de qualidade Q , definido como

$$Q = \omega \frac{\text{energia armazenada}}{\text{potência média dissipada}} \quad (7)$$

, isto é, o fator de qualidade é uma medida da razão entre as energias armazenada e perdida por unidade de tempo. Assim, na ressonância

$$Q = \omega_o \frac{L I_0^2/2}{I_0^2 R/2} \quad (8)$$

Simplificando a Equação 8, resulta:

$$Q = \omega_o L/R \quad (9)$$

ou

$$Q = 1/\omega_o RC \quad (10)$$

Substituindo (4) em (9), obtém-se o fator de qualidade em função dos parâmetros do circuito

$$Q = Z_o/R \quad (11)$$

onde

$$Z_o = \sqrt{L/C} \quad (12)$$

é a impedância característica do circuito.

É possível expressar a impedância em termos do fator de qualidade e da frequência de ressonância. Com esse fim, multiplica-se a parte imaginária de (1) por $\omega_o R / \omega_o R$, resultando, após algumas manipulações algébricas em

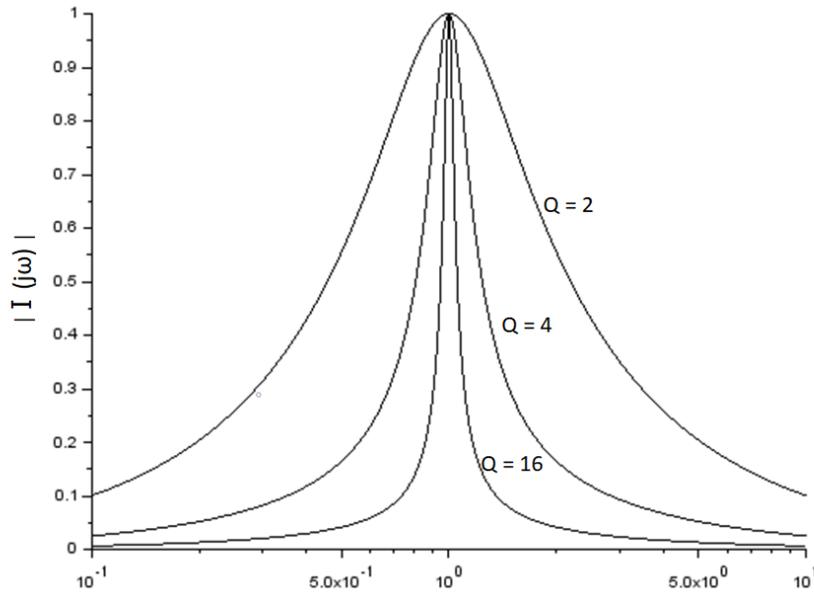
$$\dot{Z}(j\omega) = R \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \right] \quad (13)$$

Substituindo o módulo da Equação 13 no denominador da Equação 5, obtém-se a resposta em frequência da magnitude da corrente do circuito ressonante em função de Q e ω_o :

$$I = |\dot{I}(j\omega)| = \frac{V_m}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}} \quad (14)$$

a qual é apresentada na Figura 11 para três valores do fator Q com ω_o e R iguais a 1. A Figura 11 mostra que quanto maior o valor de Q , mais aguda é a curva de ressonância. Em outras palavras mais seletivo é o circuito. A seletividade é a propriedade de um circuito RLC de responder a uma determinada frequência e rejeitar as demais.

Figura 11 – A resposta em frequência da magnitude da corrente do circuito ressonante série para $Q = 2$, $Q = 4$ e $Q = 16$, com ω_o e R iguais a 1.



Na ressonância, a tensão de pico sobre o capacitor é igual à tensão de pico no indutor, ambas iguais ao produto valor de pico da tensão aplicada V_m pelo fator de qualidade Q , pois

$$V_C = V_L = I_o X_L = I_o \omega_o L \quad (15)$$

Substituindo primeiro a Equação 6 na Equação 15, obtém-se

$$V_C = V_L = \frac{V_m \omega_o L}{R} \quad (16)$$

e depois a Equação 9 na Equação 16, resulta

$$V_C = V_L = V_m Q \quad (17)$$

Assim, uma vez que Q usualmente é maior do que um, em um circuito RLC série em ressonância as tensões sobre os elementos reativos podem ser bem maiores que a tensão aplicada pela fonte de alimentação.

Esse efeito, onde as tensões reativas dos componentes internos são maiores que a tensão de alimentação, pode trazer risco aos componentes do circuito, bem como há vários benefícios associados a ele. Quando se

trata de sinais CA, a amplificação da tensão pode ser feita passivamente, o que significa que a amplitude do sinal pode ser aumentada sem um aumento proporcional do consumo de energia. A amplificação de tensão é usada, por exemplo, em antenas de rádio. Os receptores de rádio aumentam a amplitude da tensão do sinal que está sendo recebido antes dele chegar aos amplificadores de estado sólido do circuito.

A potência média dissipada pelo circuito série RLC é

$$P(\omega) = \frac{1}{2} I^2 R \quad (18)$$

Na ressonância, a potência média é máxima e é expressa por

$$P(\omega_0) = \frac{1}{2} I_o^2 R \quad (19)$$

Nas frequências de meia potência $\omega = \omega_1$ e $\omega = \omega_2$ a potência dissipada vale

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2} P(\omega_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} I_o^2 R \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_o}{\sqrt{2}} \right)^2 R \quad (20)$$

Assim, a magnitude das correntes de meia potência é expressa por

$$I_1 = I_2 = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}R} \quad (21)$$

Logo, as frequências de meia potência $\omega = \omega_1$ e $\omega = \omega_2$ podem ser encontradas usando o fato de que uma diminuição da corrente para $1/\sqrt{2}$ do seu valor na ressonância corresponde a um aumento na impedância igual $\sqrt{2}$ vezes o valor na ressonância, que é igual a R . Assim, nas frequências de meia potência

$$Z = |\dot{Z}(j\omega)| = \sqrt{2}R \quad (22)$$

Substituindo a Equação 13 na Equação 22, obtém-se

$$\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2} = \sqrt{2} \quad (23)$$

Após algumas manipulações algébricas da Equação 23 obtém-se a equação quadrática

$$\omega^2 \pm \frac{\omega_o}{Q} \omega - \omega_o^2 = 0 \quad (24)$$

com solução expressa por

$$\omega = \pm \frac{\omega_o}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_o}{2Q} \right)^2 + \omega_o^2} \quad (25)$$

Desconsiderando as soluções negativas, encontram-se as frequências de meia potência inferior

$$\omega_1 = -\frac{\omega_o}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_o}{2Q} \right)^2 + \omega_o^2} \quad (26)$$

e superior

$$\omega_2 = \frac{\omega_o}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_o}{2Q} \right)^2 + \omega_o^2} \quad (27)$$

Da trigonometria sabe-se que a fase da impedância complexa pode ser expressa por

$$\varphi = \text{arc cos}(R/Z) \quad (28)$$

Substituindo-se a Equação 22, que representa o módulo da impedância nas frequências de meia potência, na Equação 28, obtém se

$$\varphi = \text{arc cos}(1/\sqrt{2}) \quad (29)$$

Assim, a fase da corrente em ω_1 é 45° (circuito capacitivo) e em ω_2 é -45° (circuito indutivo).

A largura de banda B , por sua vez, é definida como a diferença entre as duas frequências de meia potência, ou seja,

$$B = \omega_2 - \omega_1 \quad (30)$$

A relação entre a largura de banda e o fator de qualidade é obtida subtraindo Equação 27 da Equação 26, resultando em

$$B = \omega_o / Q \quad (31)$$

que é uma expressão muito conveniente, pois relaciona a largura de banda com o fator de qualidade do circuito. A Equação 31 confirma o fato mencionado anteriormente que quanto maior o valor de Q , menor a largura de banda B , e vice-versa.

Substituindo a Equação 9 na Equação 31, obtém-se B em função dos parâmetros do circuito, ou seja,

$$B = R/L \quad (rad/s) \quad (32)$$

Para se obter uma expressão que permita calcular as frequências de meia potência em função dos parâmetros do circuito, substitui-se, nessa ordem, as Equações 31, 32 e 4 nas Equações 26 e 27, resultando em

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (33)$$

e

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (34)$$

Para obter uma expressão que relacione as frequências de meia potência com a frequência de ressonância, se adicionam as Equações 26 e 27, obtendo-se

$$\omega_1 + \omega_2 = 2 \sqrt{\left(\frac{\omega_o}{2Q}\right)^2 + \omega_o^2} \quad (35)$$

que, após algumas manipulações algébricas, resulta em

$$\omega_o = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (36)$$

, expressão que indica que a frequência de ressonância é a média geométrica das frequências de meia potência. Assim, ω_1 e ω_2 não são simétricas em relação a frequência de ressonância. Entretanto, quando o fator de qualidade for elevado (por convenção, $Q \geq 10$), a Equação 36 torna-se

$$\omega_1 + \omega_2 \cong 2\omega_o \quad (37)$$

ou

$$\omega_o \cong \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (38)$$

indicando que, quando Q for elevado, a frequência de ressonância é a média aritmética das frequências de meia potência. Assim, as frequências de meia potência podem ser aproximadas por

$$\omega_1 \cong \omega_o - \frac{B}{2} \quad (39)$$

e

$$\omega_2 \cong \omega_o + \frac{B}{2} \quad (40)$$

Nas Equações 13, 14, 26, 27, 31, 36, 38, 39 e 40 a frequência angular ω pode ser substituída pela frequência cíclica f (Hz). A frequência angular corresponde a taxa de deslocamento ou rotação angular, ou

seja, mede a variação de um ângulo no tempo. A frequência cíclica, por sua vez, mede o número de eventos por unidade de tempo. Por eventos se entende rotações, ciclos etc.

4 EXPERIMENTAÇÃO DE UM CIRCUITO RESSONANTE SÉRIE

Será testado em laboratório um circuito ressonante série com frequência de ressonância igual a 40 kHz e fator de qualidade próximo a dois.

Com essas especificações, a partir da Equação 31, obtém-se uma largura de banda

$$B = f_o/Q = 40 \cdot 10^3 / 2 = 20 \text{ kHz}$$

A partir das Equações 26 e 27, obtém as frequências de meia potência, ou seja,

$$f_1 = -\frac{f_o}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{f_o}{2Q}\right)^2 + \omega f_o^2} = -\frac{40 \cdot 10^3}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{40 \cdot 10^3}{2Q}\right)^2 + (40 \cdot 10^3)^2} \cong 31,2 \text{ kHz}$$

e

$$f_2 = \frac{f_o}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{f_o}{2Q}\right)^2 + \omega f_o^2} = \frac{20 \cdot 10^3}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{20 \cdot 10^3}{2Q}\right)^2 + (20 \cdot 10^3)^2} \cong 51,2 \text{ kHz}$$

Utilizando-se um indutor com $L = 10 \text{ mH}$, o valor da resistência efetiva do circuito é obtido manipulando a Equação 32, ou seja

$$B = R/L \rightarrow R = B \cdot L = 2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cong 1.257 \Omega$$

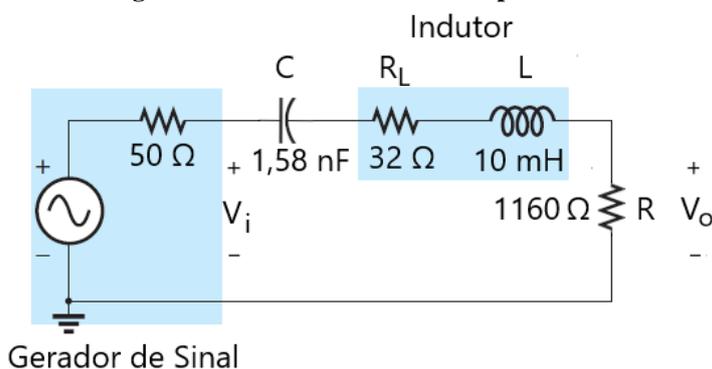
Como o gerador de função utilizado no teste possui impedância interna de 50Ω e o indutor utilizado possui uma resistência própria R_L em corrente contínua de 32Ω , serão utilizados no circuito um resistor de $1 \text{ k}\Omega$ em série com um resistor de 180Ω . O valor do capacitor é obtido a partir da Equação 4 como segue:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow C = \frac{1}{(2\pi f_o)^2 L} = \frac{1}{(2\pi \cdot 40 \cdot 10^3)^2 10 \cdot 10^{-3}} \cong 1,58 \text{ nF}$$

Portanto, será utilizado um capacitor de poliéster metalizado com valor comercial igual a $1,5 \text{ nF}$.

O circuito da Figura 12 foi montado em uma matriz de contatos, onde os valores indicados de R , R_L , L e C são os medidos em laboratório. Com a amplitude do sinal senoidal do gerador de sinal ajustado para 5 V de pico a pico, uma ponteira do osciloscópio (canal 1) disposta para medir o sinal v_i e outra (canal 2) para medir o sinal v_o , a frequência do sinal foi variada de 5 kHz a 150 kHz , resultando na Tabela 1, onde φ representa a defasagem entre os sinais v_o e v_i . Observe que, onde a defasagem entre os sinais vale 45° , 0° e -45° , tem-se, respectivamente, as frequências de meia potência inferior, de ressonância e de meia potência superior.

Figura 12 – Circuito RLC série experimental.



Na Figura 13 são apresentadas as telas do osciloscópio representando as medidas realizadas nas frequências de meia potência e na frequência de ressonância. Utilizando o *script* Scilab⁶ apresentado no Quadro 1, foram traçadas na Figura 14 as respostas em frequência teórica e experimental (ganho e fase em graus *versus* frequência).

⁶ Criado por pesquisadores do INRIA (*Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*) e do ENPC (*École Nationale des Ponts et Chaussées*) e disponível como software gratuito e de código aberto desde 1994, o Scilab é destinado a engenheiros e cientistas. Atualmente, é desenvolvido pela *Dassault Systèmes*.

Tabela 1 – Resultados experimentais.

f (kHz)	v _i (V _{p-p})	v ₀ (V _{p-p})	G = v ₀ / v _i	φ (°)
5	5,16	0,30	0,06	86,0
10	5,16	0,62	0,12	82,1
20	5,16	1,45	0,28	71,8
30	5,08	2,82	0,56	52,3
31,9	5,04	3,16	0,63	45,4
35	5,00	3,84	0,77	31,8
40	4,96	4,40	0,89	6,34
41	4,96	4,48	0,90	0,00
45	4,96	4,24	0,86	-18,8
50	5,04	3,68	0,73	-36,7
53,3	5,04	3,20	0,64	-44,9
60	5,08	2,56	0,50	-55,7
70	5,08	1,96	0,39	-65,0
80	5,12	1,56	0,31	-69,7
90	5,12	1,3	0,25	-71,9
100	5,12	1,12	0,22	-76,0
150	5,12	0,65	0,13	-81,0

Quadro 1 – Script Scilab elaborado para traçar as respostas em frequência teórica e experimental do circuito da Figura 12.

//TEÓRICO

f = 5000:100:150000; w=2*%pi*f; R= 1160; RL=32;L = 10d-3; C=1.58d-9;

H = R ./ (R+RL+%i*w*L-%i*(1./(w*C)))

subplot(211);

plot2d(f,abs(H),logflag='ln'); xgrid;

xlabel("\$\scalebox{1.8}{f}\$"); ylabel("\$\scalebox{1.8}{| H(f) |}\$")

//PRÁTICO

ft=[5 10 20 30 31.9 35 40 41 45 50 53.3 60 70 80 90 100 150]*1000

vi=[5.16 5.16 5.16 5.08 5.04 5.00 4.96 4.96 4.96 5.04 5.04 5.08 5.08 5.12 5.12 5.12 5.12]

vo=[0.30 0.62 1.45 2.82 3.16 3.84 4.40 4.48 4.24 3.68 3.20 2.56 1.96 1.56 1.30 1.12 0.65]

Ht = vo./vi

a=get("current_axes"); a.font_size = 3;

plot2d(ft,Ht,-3)

legend(['\$teórica\$'; '\$experimental\$'],pos=-5,boxed=%f);

gce().font_size = 4;

subplot(212)

xlabel("\$\scalebox{1.8}{f}\$"); ylabel("\$\scalebox{1.8}{\phi(f) (^\circ)}\$")

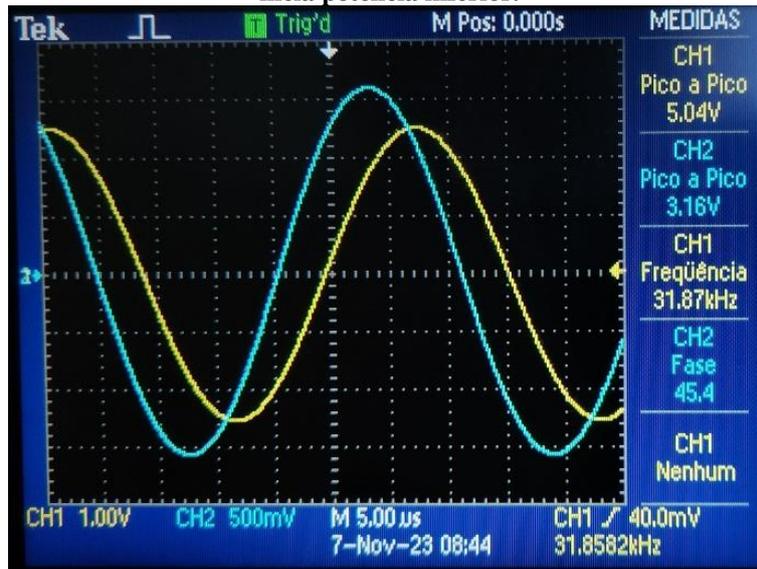
plot2d(f,atand(imag(H),real(H)),logflag='ln')

phit=[86 82.1 71.8 52.3 45.4 31.8 6.34 0 -18.8 -36.7 -44.9 -55.7 -65.0 -69.7 -71.9 -76 -81]

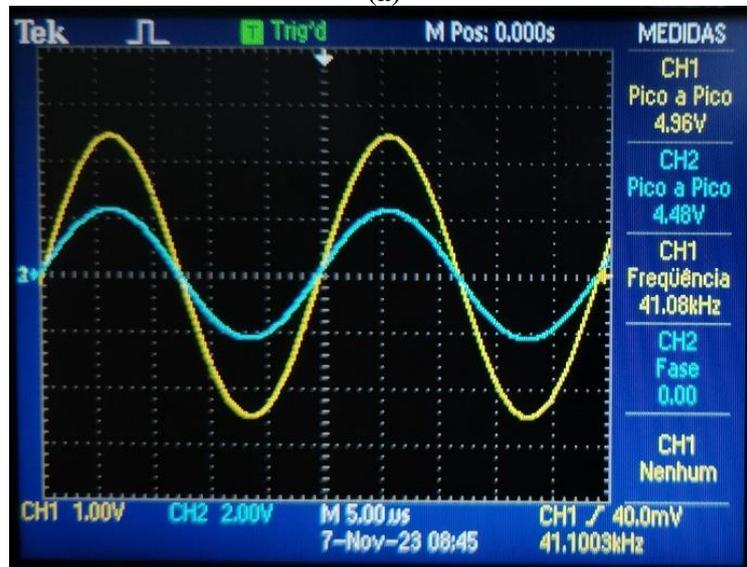
plot2d(ft,phit,-3); xgrid

a=get("current_axes"); a.font_size = 3;

Figura 13 – Tensão de saída v_o (em azul) e tensão de entrada v_i (em amarelo) na (a) frequência de meia potência inferior, (b) frequência ressonância e (c) frequência de meia potência superior.



(a)

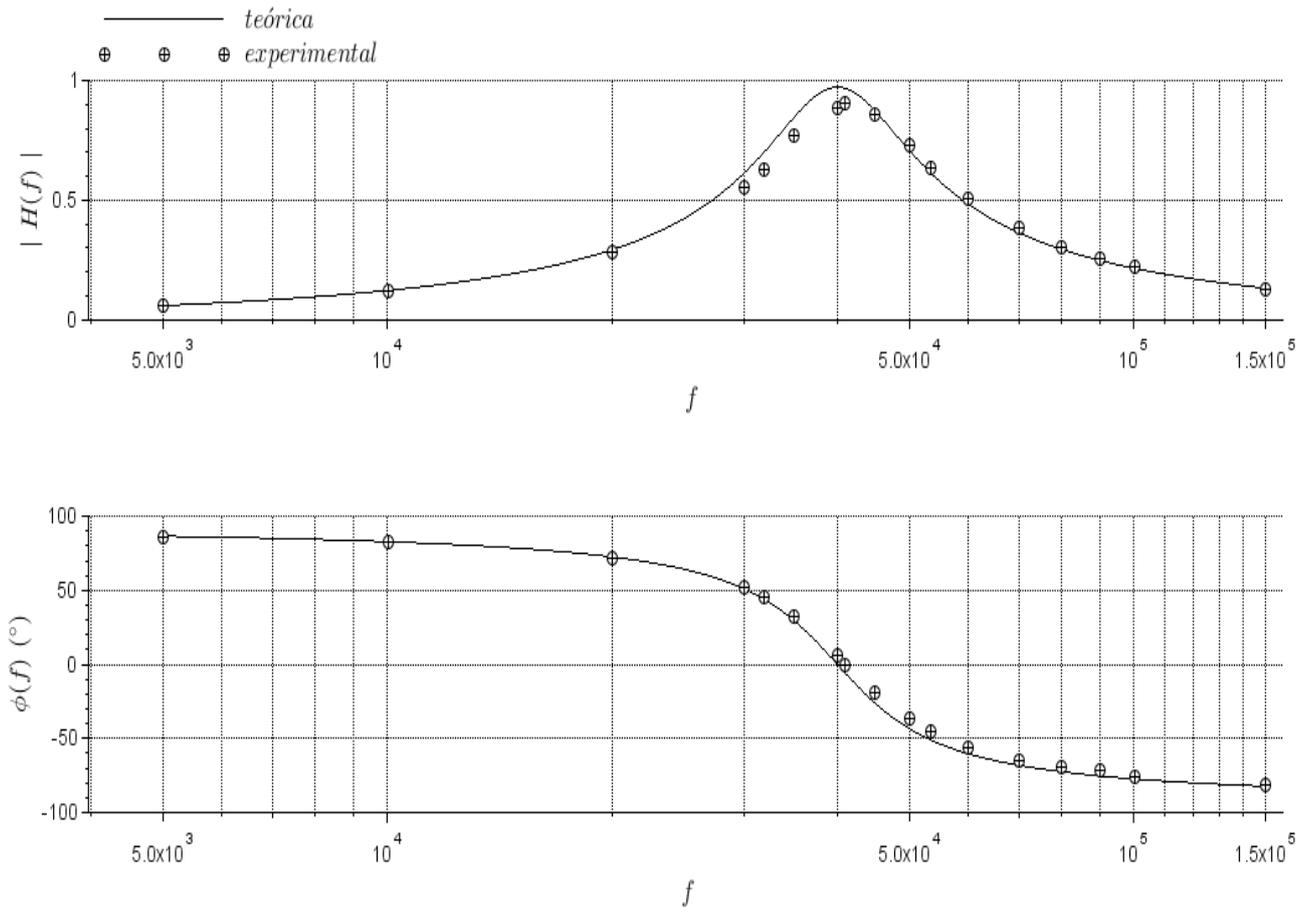


(b)



(c)

Figura 14 – Respostas em frequência teórica e experimental do circuito da Figura 12.



Analisando a Figura 14, verifica-se que a resposta em frequência experimental acompanha a resposta teórica. Na Tabela 2, apresenta-se a variação percentual entre os valores teóricos e experimentais nas frequências de interesse.

Tabela 2 – Variação percentual entre valor previsto e valor experimental de grandezas de interesse.

Grandeza	Valor teórico	Valor experimental	Erro relativo percentual
f_0 (kHz)	40	41,08	+2,7
B (kHz)	20	21,43	+7,15
Ganho em f_0	0,973	0,903	-7,20

As diferenças observadas entre os valores podem ser atribuídas a dificuldade de realizar uma medida precisa do indutor e pelo modelo teórico utilizado para o indutor que não prevê as perdas no núcleo (por histerese e correntes parasitas) e a variação das perdas no cobre com a frequência. Um modelo teórico mais elaborado do indutor será discutido na segunda parte desse artigo.

Por sua vez, a principal dificuldade com as medidas do indutor reside no fato de que a sua indutância é bastante dependente da frequência, conforme mostra a Figura 15, extraída da folha de dados de um fabricante. Para o presente trabalho, a medida da indutância foi realizada com um instrumento que utiliza uma frequência de 200 Hz, uma frequência muito aquém a frequência de ressonância do circuito testado.

Pontua-se que capacitores e resistores também apresentam características não ideais, que entretanto, não contribuem significativamente para as discrepâncias verificadas entre teoria e prática. Para ilustrar, apresenta-se na Figura 16 a variação típica da capacitância de um capacitor com dielétrico de poliéster metalizado em função da frequência, onde se verifica uma variação percentual da capacitância inferior a -2% na faixa de frequências onde se observou as maiores discrepâncias entre teoria e prática.

Figura 15 – Curva característica típica da indutância (mH) versus a frequência (kHz) de um indutor com núcleo de ferrite (WÜRTH ELEKTRONIK, 2023).

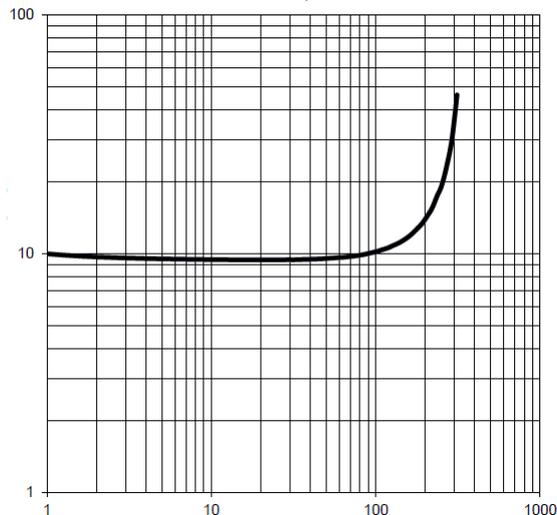
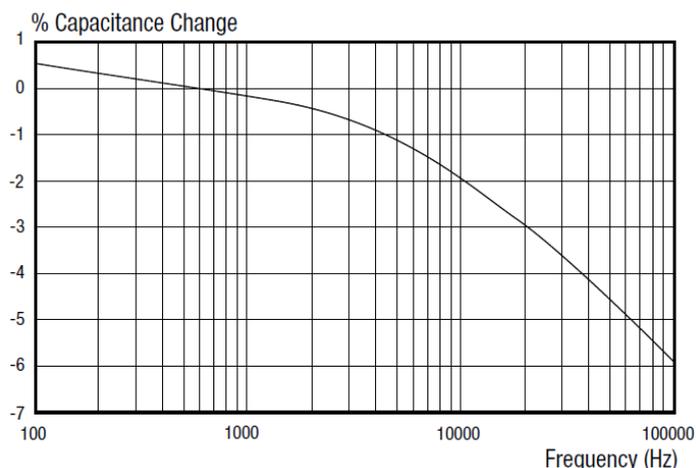


Figura 16 – Variação percentual da capacitância versus a frequência (Hz) para um capacitor de poliéster metalizado (DEARBORN ELECTRONICS, 2023).



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ressonância é um dos fenômenos mais importantes da natureza, tanto do cotidiano, onde desempenha um papel em muitos aspectos na tecnologia e na música, quanto nos processos básicos do mundo físico. A manifestação mais familiar do fenômeno da ressonância ocorre em um pêndulo de qualquer tamanho ou forma, incluindo o balanço. Quando uma criança encolhe e estica as pernas na frequência natural do pêndulo constituído por ela e o balanço, a amplitude das oscilações do balanço aumenta gradativamente. O que torna isso possível é a interação periódica entre energia cinética e energia potencial e, da mesma forma, a ressonância elétrica é possibilitada pelo movimento periódico de vaivém da energia elétrica de um capacitor e a magnética de um indutor. A ressonância, um conceito fundamental no mundo da eletricidade, apresenta muitas possibilidades de aplicação, ao mesmo tempo que apresenta riscos potenciais que técnicos, tecnólogos e engenheiros devem conhecer. A ressonância pode gerar ruído ou receber ruído induzido. Se um circuito contém um circuito ressonante não intencional, ele pode gerar uma corrente ou tensão elevada na frequência de ressonância, aumentando a probabilidade de gerar um sinal interferente. Ao entender e aproveitar a ressonância, os profissionais podem otimizar o desempenho dos circuitos, melhorar a eficiência e explorar os meandros do processamento de sinais.

Na segunda parte desse artigo, o estudo da ressonância será ampliado, apresentando-se novas configurações e aplicações.

Agradecimentos

O autor agradece aos colegas Jony Laureano Silveira pela cuidadosa revisão do texto, Mauro Tavares Peraça pelas valiosas sugestões e Muriel Bittencourt de Liz pela revisão do *abstract*.

REFERÊNCIAS

- BAKER, G. **Seven Tales of the Pendulum**. Reino Unido: OUP Oxford, 2011. 227 p.
- BILLAH, K. e SCANLAN R. Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure, and Undergraduate Physics Textbooks. **American Journal of Physics**. v. 59, n. 2 p. 118–124, fev. 1991.
- BISTAFA, S. R. Euler first theory of resonance. **Archive for History of Exact Sciences**. v. 76, n. 3, p. 207–221, 2002.
- BLECK-NEUHAUS, J. Mechanical resonance: 300 years from discovery to the full understanding of its importance. **arXiv: History and Philosophy of Physics**, 2018.
- DARRIGOL, O. **Electrodynamics from Ampère to Einstein**. Oxford e Nova Iorque: Oxford University Press, 2000. 532 p.
- DEARBORN ELECTRONICS. **Film & mica capacitors**. Disponível em: <<https://exxelia.com/uploads/PDF/59bac88997252.pdf>> Acesso em: 31. out. 2023.
- DIMAROGONAS, A.D. The origins of vibration theory. **Journal of Sound and Vibration**. v. 8, n. 2, p. 181–189, jul.1990.
- DUNN, J. **The Leyden jar: a colonial-era capacitor**. Disponível em: <<https://www.edn.com/the-leyden-jar-a-colonial-era-capacitor/>>. Acesso em: 15 out. 2023.
- EULER, L. De novo genere oscillationum. **In: Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, Vol. 11, pp. 128–149, 1750.
- GALILEO, G. **Dialogues concerning two new sciences**. Nova Iorque: Dover, 1954. 300 p.
- GALILEU, G. **Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano**. Trad. Pablo Rubén Miranda. São Paulo: Editora 34, 2011.
- HELMHOLTZ, H. On the Conservation of Force. **In: Scientific Memoirs, Natural Philosophy**, Vol. 1, org. John Tyndall & William Francis, p. 114–162. Londres, Taylor and Francis, 1853.
- HENRY, J. **Scientific Writings of Joseph Henry**. Vol. 1. Washington: Smithsonian Institution, 1886. 523 p.
- HERTZ, H. **Electric waves**. Londres: Macmillan and Co, 1933. 278 p.
- MAXWELL J. A dynamical theory of the electromagnetic field. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, n. 155, p 459–512, jan. 1865. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1865.0008>>. Acesso em: 18 out. 2023.
- MILLER, J. Practical and Implementation Issues of Wireless Power Charging of EV's. **In: IEEE Transportation Electrification Community (TEC) eNewsletter**, jul./ago. 2014. Disponível em: <<https://tec.ieee.org/newsletter/july-august-2014/practical-and-implementation-issues-of-wireless-power-charging-of-ev's>>. Acesso em: 28 nov. 2023.
- NATIONAL MAGLAB. **Leyden Jars – 1745**. Disponível em: <<https://nationalmaglab.org/magnet-academy/history-of-electricity-magnetism/museum/leyden-jars-1745/>>. Acesso em: 15 out. 2023.
- OBERBECK, A. Ueber eine der Resonanz ähnliche Erscheinung bei electrischen Schwingungen. **Annalen der Physik**, v. 262, n. 10, p. 245–253, 1885.
- ROGET, P.M. **Treatises on Electricity, Galvanism, Magnetism, and Electro-Magnetism**. Londres: Baldwin and Cradock, 1831. 316 p.
- SAVARY, F. **Memoir on Magnetization**. Trad. Eric Hickok. 1826. Disponível em: <<http://commons.princeton.edu/motorcycledesign/joseph-henry-project/oscillatory-discharge/experiments/>>. Acesso em: 15 out. 2013.
- SCIENCE MUSEUM GROUP. **Model of the Zhang Heng seismoscope**. Disponível em: <<https://collection.sciencemuseumgroup.org.uk/objects/co54055/model-of-the-zhang-heng-seismoscope-seismoscope>>. Acesso em: 20 nov. 2023.
- SLEESWYK, A. e SIVIN N. Dragons and toads. The chinese seismoscope of a.d. 132. **Chinese Science**. v. 6, pp. 1–19, 1983.

SPARK MUSEUM. **Early wireless transmitters**. Disponível em: <www.sparkmuseum.com/SPKTRAN.HTM/>. Acesso em: 20 out. 2023.

THOMSON, W. On transient electric currents. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 5, n. 34, p. 393–405, 1853.

TRUESDELI, C. **The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638 – 1788**. Suíça: Orell Füssli Turici, 1960. 435 p.

WÜRTH ELEKTRONIK. **Folha de dados do componente 7447221103**. Disponível em: <https://www.w-online.com/en/components/products/WE-TI_2/>. Acesso em: 31 out. 2023.

YAN, H. e HSIAO, K. Reconstruction design of the lost seismoscope of ancient China. **Mechanism and Machine Theory**, v. 42, n. 12, p. 1601–1617, dez. 2007.

YOUNG, T. **A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts**. Vol. 1. Londres: Johnson, 1807. 796 p.