



## RESSONÂNCIA: UMA REVISÃO CONTEXTUALIZADA – SEGUNDA E ÚLTIMA PARTE

Marco Valério Miorim Villaça<sup>1</sup>

**Resumo:** A ressonância é um fenômeno que ocorre em circuitos RLC, onde a impedância do circuito é puramente resistiva e os efeitos dos componentes reativos (indutores e capacitores) se cancelam. Na primeira parte deste artigo, partindo-se das primeiras observações da oscilação mecânica, apresentou-se uma sequência de eventos que permitiram a Hertz, em 1887, demonstrar a existência das ondas eletromagnéticas, fenômeno físico que permite a comunicação entre pessoas a qualquer hora e em qualquer lugar. Finalizando a história da ressonância, será descrito o esforço de Nikola Tesla para tornar viável a transferência de energia através do ar. Na época de Tesla, esta tecnologia mostrou-se inviável, passando para a obscuridade, mas universalização dos dispositivos portáteis justificou um outro olhar para a tecnologia. A análise quantitativa da topologia clássica RLC série apresentada na primeira parte do artigo é estendida por dualidade para a configuração paralela clássica. Como as características de impedância de resistores, capacitores e indutores utilizados nas topologias clássicas são assíntotas de baixa frequência das respostas de frequência desses componentes, apresentam-se modelos aprimorados dos componentes passivos, mais adequados para circuitos operando em altas frequências. Finalmente, para oferecer uma visão sobre o comportamento de topologia mais complexas, são apresentados o equacionamento, simulação e resultados experimentais de uma topologia ressonante híbrida, onde se avaliou o impacto da resistência dos enrolamentos do indutor na condição de ressonância um circuito RLC paralelo clássico

**Palavras-chave:** Ressonância. História da tecnologia. Teoria de circuitos elétricos.

**Abstract:** *Resonance is a phenomenon that occurs in RLC circuits, where the circuit impedance is purely resistive, and the effects of reactive components (inductors and capacitors) cancel each other out. In the first part of this article, starting from the initial observations of mechanical oscillation, a sequence of events was presented that enabled Hertz, in 1887, to demonstrate the existence of electromagnetic waves – physical phenomenon that enables communication between people at any time and from anywhere. Concluding the history of resonance, Nikola Tesla's effort to make the transfer of energy through the air feasible will be described. During Tesla's time, this technology proved impractical and faded into obscurity, but the proliferation of portable devices justified a reconsideration of the technology. The quantitative analysis of the classical series RLC topology presented in the first part of the article is extended through duality to the classical parallel configuration. Since the impedance characteristics of resistors, capacitors, and inductors used in classical topologies represent low-frequency asymptotes of the frequency responses of these components, enhanced models of passive components are presented, more suitable for circuits operating at high frequencies. Finally, to provide insight into the behaviour of more complex topologies, the equations, simulations, and experimental results of a hybrid resonant topology are presented, evaluating the impact of inductor winding resistance on the resonance condition of a classic parallel RLC circuit.*

**Keywords:** *Resonance. History of technology. Electrical circuits theory.*

<sup>1</sup> Professor do Departamento Acadêmico de Eletrônica (DAELN), IFSC/Florianópolis <mvillaca@ifsc.edu.br>.

### 1 INTRODUÇÃO

Na primeira parte deste artigo, apresentou-se a construção histórica do conceito de ressonância elétrica, partindo-se das primeiras observações da oscilação mecânica e finalizando com a demonstração da existência

das ondas eletromagnéticas por Hertz, acontecimento que possibilitou, vários anos depois, a comunicação sem fio, a radiodifusão e a telefonia de longa distância. A Tabela 1 resume os acontecimentos históricos relacionados com o fenômeno da ressonância discutidos anteriormente. Na segunda seção do artigo, será descrito o esforço de Nikola Tesla<sup>1</sup> para tornar viável a transferência de energia através do ar utilizando a ressonância eletromagnética.

**Tabela 1 – Acontecimentos históricos relacionados à ressonância.**

<b>Cronologia</b>	<b>Personagens</b>	<b>Fatos</b>
Século V a.C.	Pitágoras	Demonstrado que a frequência natural de sistemas vibratórios é uma propriedade do sistema que não depende da magnitude da oscilação.
132	Zhang Heng	Construção de um sismômetro utilizando um pêndulo invertido.
1638	Galileu	Descrição do fenômeno da ressonância.
1738	Euler	Formulação da equação diferencial (não amortecida) do oscilador harmônico simples sob excitação harmônica.
1745	Ewald Georg von Kleist Pieter van Musschenbroek	Construção da Garrafa de Leyden, dispositivo precursor do capacitor que permitiu a elaboração de diversos experimentos essenciais para o desenvolvimento da ciência da eletricidade.
1807	Thomas Young	Demonstrado que um estímulo periódico senoidal adequado faz um pêndulo oscilar na frequência desejada.
1820	Hans Christian Ørsted André-Marie Ampère	Constatação da conexão entre eletricidade e magnetismo. Formulação da lei que relaciona a corrente ao campo magnético gerado.
1826	Felix Savary	Primeira observação da descarga oscilatória de uma garrafa de Leyden através um indutor.
1831	Michael Faraday	Demonstração do fenômeno da indução eletromagnética.
1842	Joseph Henry	Observação da descarga oscilatória de uma garrafa de Leyden ao investigar corrente induzida em condutores adjacentes ao condutor de descarga da garrafa de Leyden.
1847	Hermann von Helmholtz	Observação da descarga oscilatória da garrafa de Leyden em um ensaio sobre o princípio da conservação de energia.
1853	Lord Kelvin	Formulação de uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes para representar a descarga de um capacitor através de um condutor.
1885	Anton Oberbeck	Primeira associação da palavra ressonância às oscilações eletromagnéticas e primeiro registro da curva de ressonância na forma de tabelas de dados.
1865	James Maxwell	Previsão da existência de ondas eletromagnéticas.
1887	Heinrich Hertz	Demonstração da existência de ondas eletromagnéticas que se comportam de maneira muito semelhante à luz e publicação das primeiras curvas de ressonância.

Conforme foi discorrido na primeira parte desse artigo, a frequência de oscilação resultante da conexão de um capacitor com um indutor depende apenas dos valores da capacitância e da indutância, não interessando a tensão (ou corrente) inicial a que foram submetidos, ou seja, o circuito LC possui uma frequência única e natural, independentemente da energia inicialmente armazenada. Expôs-se, também, que qualquer circuito elétrico composto por uma combinação de resistores, capacitores e indutores está propenso a apresentar um certo comportamento quando a frequência de uma fonte de alimentação alternada se aproximar da sua frequência natural ou característica. Se a frequência da fonte de alimentação coincidir com a frequência natural, que é própria da configuração do circuito, o circuito estará no estado de ressonância. Nesse estado, os elementos reativos trocam energia apenas entre si, ou seja, exceto pelas perdas resistivas do circuito, a fonte não precisa fornecer energia para nenhum deles. Assim, a ressonância foi exatamente definida como “a

<sup>1</sup> Engenheiro eletricitista naturalizado americano de etnia sérvia, que nasceu em 1856 na aldeia de Smiljan, na atual Croácia, quando a região fazia parte do Império Austro-Húngaro (Huys, 2004, p. 3). Enquanto os croatas acreditam que Tesla deve ser visto como um croata porque nasceu em Smiljan, os sérvios sentem que ele é um dos seus devido às suas raízes sérvias. Em um telegrama ao líder croata Dr. Vlatko Macek, Tesla escreveu: “Estou igualmente orgulhoso da minha origem sérvia e da minha pátria croata” (Tesla Memorial Society of New York, 2024, tradução nossa)

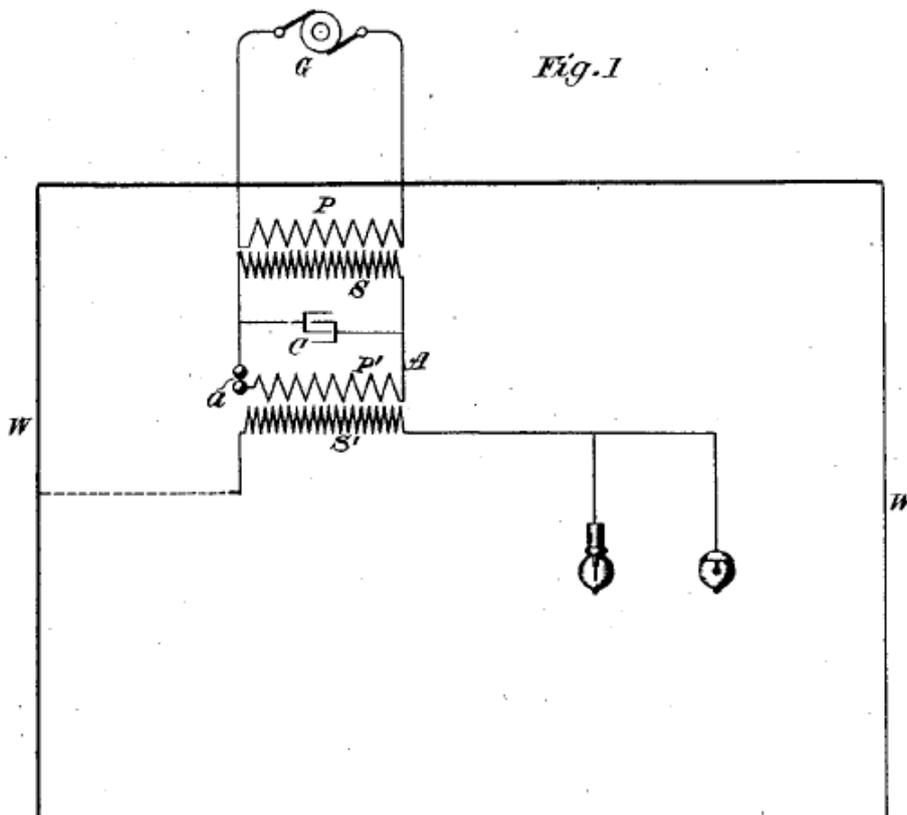
condição em um circuito RLC na qual corrente resultante está em fase com a tensão aplicada, ou seja, o circuito se apresenta para a fonte como uma impedância puramente resistiva” (Villaça, 2023, p .9).

## 2 A BOBINA TESLA E A TRANSMISSÃO SEM FIO DE ELETRICIDADE

Em junho de 1891, Tesla (1891a), na palestra “*Experiments with Alternate Currents of Very High Frequency and Their Application to Methods of Artificial Illumination*” perante o *American Institute of Electrical Engineers* no *Columbia College*, revelou uma de suas invenções mais importantes, a bobina Tesla, um transformador de alta frequência capaz de criar tensões muito altas com baixas correntes empregando o conceito de ressonância. Na palestra, Tesla apresentou algumas realizações importantes que estabeleceram um arcabouço para compreender e avançar na utilização de sistemas de iluminação sem fio e distribuição de energia de alta tensão e frequência. Ele demonstrou os benefícios potenciais da iluminação por indução, visando que essa promissora tecnologia se tornasse um meio viável de transferir energia através do ar. Na Figura 1 é apresentado o diagrama de um dos experimentos que Tesla utilizou para revelar a sua descoberta, diagrama que foi apresentado no pedido de patente realizado em abril de 1891 nos Estados Unidos, de número 454622 e intitulada *System of electric lighting*. Nessa figura,

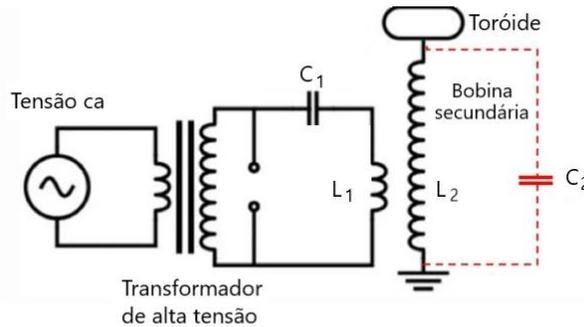
“G é a fonte primária de corrente ou energia elétrica, expliquei acima como várias formas de gerador podem ser usadas para este fim; mas no presente, por exemplo, assumo que G é um gerador de corrente alternada de força eletromotriz comparativamente baixa. Nessas circunstâncias, levanto o potencial da corrente por meio de uma bobina de indução com um primário P e um secundário S. Então pela corrente desenvolvida nesse secundário carrego um condensador C, e este condensador descarrega através ou em um circuito A, contendo um *gap a*, ou, em geral, meios para manter uma descarga disruptiva. Pelos meios acima descritos é produzida uma corrente de enorme frequência. Meu objetivo é converter isso em um circuito de trabalho, de altíssimo potencial, com esse propósito eu conecto no circuito A o primário P' de uma bobina de indução com um longo fio fino secundário S'. A corrente no P' primário desenvolve no secundário S' uma corrente ou efeito elétrico de frequência correspondente, mas de enorme diferença de potencial, e o secundário S' torna-se, assim, uma fonte de produção de luz. Os dispositivos luminosos podem ser ligados a qualquer terminal do secundário S'. Se desejar, um terminal pode ser conectado a uma parede condutora W de uma sala ou espaço a ser iluminado e o outro nas lâmpadas (Tesla, 1891b. p. 3, tradução nossa).

**Figura 1 – Circuito utilizado por Tesla para a transferência de energia por indução. A bobina Tesla é o circuito formado por duas bobinas (P-S e P'-S'), pelo capacitor C e o circuito A (Tesla, 1891b).**



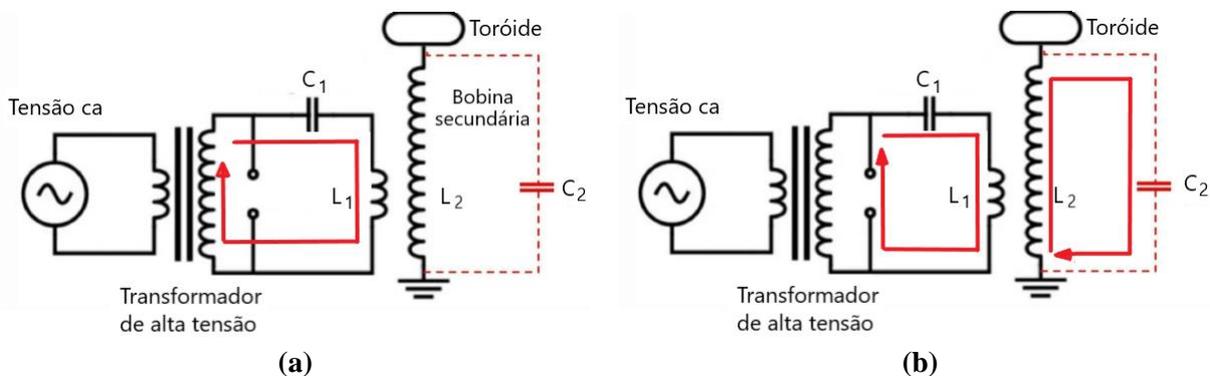
Na Figura 1, a bobina de Tesla é formada pelo centelhador *a*, que consiste em dois eletrodos com um *gap* curto entre eles; por um transformador ressonante composto pela bobina primária  $P'$ , pela bobina secundária  $S'$ , pelo capacitor  $C$ , que desempenha o papel de armazenamento de energia e forma um circuito ressonante LC com a bobina primária  $P'$  e pela capacitância equivalente formada pela capacitância parasita da bobina secundária e pela capacitância entre o bulbo da lâmpada e a parede  $W$  ligada à terra. Quando a tensão é suficientemente alta, haverá uma ruptura do ar e a corrente circulará pelo capacitor equivalente. Na Figura 2 se apresenta um esquema atualizado do circuito da Figura 1 com um toróide substituindo a lâmpada no topo do secundário da bobina de Tesla e o capacitor equivalente adicionado e representado por  $C_2$ . Aqui, o toróide é uma placa do capacitor, a outra placa é a terra. Um toróide tem uma grande área de superfície curva que impede a formação antecipada de arcos, permitindo que uma tensão mais alta seja alcançada, em comparação com o emprego de uma placa ou esfera plana.

**Figura 2 – Esquemático moderno da bobina Tesla.**



Em uma análise simplificada, o funcionamento da bobina de Tesla do circuito da Figura 2 pode ser assim descrito: em uma primeira etapa do funcionamento, representada pela Figura 3(a), o centelhador aparece inicialmente como um circuito aberto. A corrente fornecida pelo transformador de alta tensão carrega o capacitor  $C_1$  até que a sua tensão provoque a ruptura da rigidez dielétrica do ar entre os eletrodos do centelhador, que se torna um bom condutor. Inicia, então, a segunda etapa do funcionamento (Figura 3 (b)), onde o capacitor fica conectando ao enrolamento primário do transformador ressonante através do centelhador, formando um circuito ressonante, onde a energia armazenada pelo capacitor é gradualmente transferida para o indutor  $L_1$  na forma de uma oscilação amortecida de alta frequência. Quando a energia no capacitor se esgota, a energia no indutor começa a ser gradualmente transferida para o capacitor, ciclo que se repete, até que toda a energia armazenada no circuito LC seja dissipada no centelhador. A proximidade dos enrolamentos primário e secundário provoca o acoplamento magnético entre eles. Assim, a corrente oscilante de alta amplitude que flui no primário faz com que uma corrente oscilante semelhante seja induzida na bobina secundária próxima. A capacitância equivalente no secundário  $C_2$  e a indutância do secundário  $L_2$  formam um segundo circuito ressonante.

**Figura 3 – (a) Primeira etapa de funcionamento da bobina Tesla: a corrente fornecida pelo transformador de alta tensão carrega o capacitor C1 e (b) Segunda etapa de funcionamento da bobina Tesla: ocorre uma oscilação de alta frequência no primário e no secundário do transformador ressonante.**



A frequência ressonante do circuito primário é deliberadamente escolhida para ser a mesma que a frequência ressonante do circuito secundário, o que permite que a tensão no secundário alcance valores elevados. A energia é gradualmente transferida do circuito ressonante primário para o circuito ressonante

secundário. Ao longo de vários ciclos, a amplitude da oscilação primária diminui e a amplitude da oscilação secundária aumenta. Eventualmente a tensão secundária se torna tão alta que a superfície curva do toróide não pode mais reter a carga e faíscas são formadas à medida que a rigidez dielétrica do ar circundante se rompe, situação representada na Figura 4. Em algum momento, toda a energia do primário é transferida para o circuito secundário. Com um centelhador ideal, o centelhamento no circuito primário cessaria neste instante, permitindo o início de um novo ciclo de carregamento do capacitor. Mas isso não é o que ocorre: na prática, a energia do secundário começa a ser transferida para o primário de uma forma semelhante à descrita anteriormente, ou seja, a corrente e a tensão no secundário diminuirão, enquanto as do primário aumentarão, situação representada na Figura 5. Isso ocorre porque o ar quente ionizado entre os eletrodos do centelhador do circuito primário ainda é capaz de conduzir a energia um pouco reduzida que agora está sendo devolvida pelo secundário, mesmo quando a intensidade do campo cai abaixo do valor crítico. Isso pode fazer com que todo o ciclo de transferência de energia do primário para secundário ocorra novamente e, nos piores casos, até três ou quatro vezes. Após alguns ciclos de transferência de energia entre primário e secundário, a energia no primário torna-se suficientemente baixa e o gap do centelhador esfria. O centelhador para de conduzir, fazendo com que a energia restante fique presa e se dissipe no circuito secundário. Como o centelhador é, neste momento, um circuito aberto, o capacitor do circuito primário começa a carregar novamente a partir da fonte de alta tensão e todo o processo se repetirá.

Figura 4 – Faíscas surgem no ar circundante a bobina de Tesla.

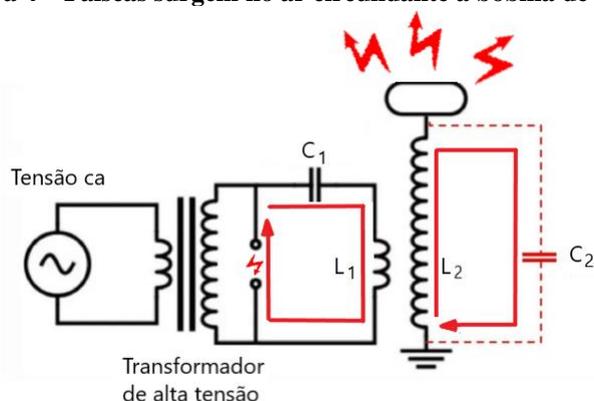
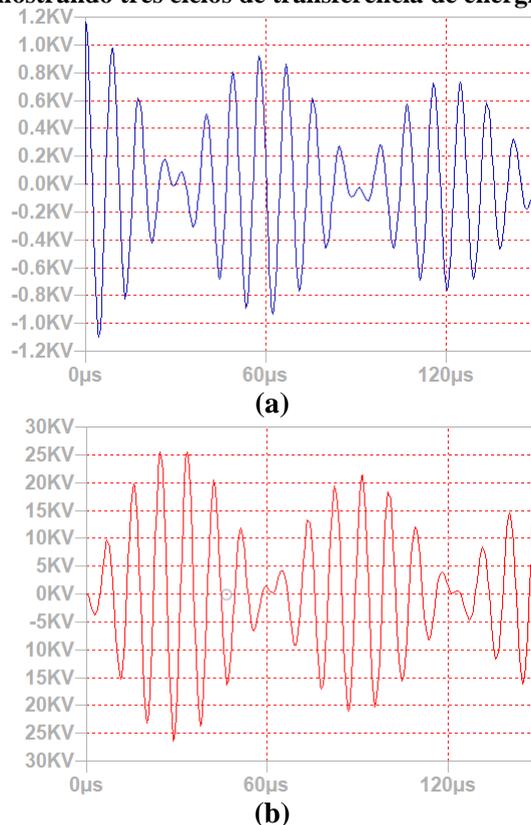


Figura 5 – Formas de onda da oscilação nos circuitos primário (a) e secundário (b) mostrando três ciclos de transferência de energia.



Um transformador padrão usa um núcleo de magnético que limita a sua frequência de operação, enquanto a bobina de Tesla possui um núcleo de ar que permite que ele opere em frequências muito mais altas. Enquanto um transformador padrão possui primário e secundário fortemente acoplados e uma relação de transformação de tensão devida à razão entre o número de espiras dos dois enrolamentos, uma bobina de Tesla usa um acoplamento relativamente fraco entre primário e secundário, sendo a tensão no secundário maximizada devido à ressonância. A constante de acoplamento  $K$  entre os dois circuitos é propositalmente mantida baixa, geralmente entre 0,05 e 0,20 (Burnett, 2024).

O ganho de tensão extremamente elevado da bobina de Tesla vem do fato de que a energia do grande capacitor do circuito primário é transferida para a capacitância parasita comparativamente pequena do circuito secundário. A energia armazenada no primário é descrita por

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 \quad (1)$$

, onde  $V_1$  é a tensão de ruptura. Se for assumido que não há perda na transferência de energia para o secundário, pelo princípio da conservação de energia, chega-se a

$$\frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 \quad (2)$$

, onde  $V_2$  é a tensão no secundário quando a transferência de energia estiver completa. Da Equação 2 resulta que o ganho de tensão da bobina de Tesla é igual a raiz quadrada da razão entre as capacitâncias, ou seja,

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad (3)$$

Como o circuito primário e secundário possuem a mesma frequência de ressonância, resulta que

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad (4)$$

ou

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{L_2}{L_1} \quad (5)$$

Substituindo-se a Equação 5 na Equação 3, obtém-se a expressão do ganho de tensão em função das indutâncias:

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad (6)$$

e

$$V_2 = V_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad (7)$$

Na prática, a tensão no secundário nunca atingirá o valor determinado pela Equação 7 devido a energia que é perdida nas resistências dos enrolamentos, na forma luz, calor e som no *gap* do centelhador primário e por radiação eletromagnética em ambas as bobinas (Burnett, 2024). Outros dois fatores limitam o pico de tensão no secundário, a saber, a formação de arcos para objetos aterrados no topo da bobina secundária e o fato de que dificilmente o primário e o secundário possuirão exatamente a mesma frequência de ressonância.

A Figura 6 apresenta uma bobina de Tesla de aproximadamente 12 metros de altura exibida no pátio do *Clinton Presidential Center* localizado na cidade de Little Rock, estado de Arkansas, Estados Unidos.

Tesla inventou sua bobina com a intenção de transmitir eletricidade pelo ar, objetivo que perseguiu na maior parte de sua carreira. Ele teorizou que a eletricidade poderia ser transmitida sem fio pelo ar a longas distâncias através de uma série de torres estrategicamente posicionadas. Onde quer que a energia fosse necessária, seria necessário apenas uma bobina receptora para converter e utilizar a energia. Com a transmissão sem fio de energia no horizonte, Tesla planejou a construção das instalações de Wardencllyffe (Figura 7) em Long Island, obra iniciada em 1901, que incluía a edificação de uma torre de madeira com mais de 57 metros de altura (Huys, 2024, p. 19). Tesla planejava usar torres como essa para criar um sistema global de

comunicação sem fio, similar ao que atualmente a Internet oferece, ou seja, que poderia transmitir, ao redor do mundo, música, notícias, relatórios e imagens usando a própria Terra como condutora. Tesla imaginava um futuro no qual as pessoas poderiam se comunicar em tempo real, independentemente da sua localização geográfica. Para Tesla:

“Assim que concluído, será possível para um homem de negócios em Nova York ditar instruções, e fazê-las aparecer instantaneamente em seu escritório em Londres ou em outro lugar. Ele poderá ligar, de sua mesa, e falar com qualquer assinante de telefone do globo, sem qualquer alteração no equipamento existente. Um instrumento barato, não maior que um relógio, permitirá ao seu portador ouvir em qualquer lugar, no mar ou na terra, música ou canção, o discurso de um líder político, o discurso de um eminente homem de ciência, ou o sermão de um clérigo eloquente, proferido em algum outro lugar, por mais distante que seja. Da mesma forma, qualquer imagem, personagem, desenho ou impressão pode ser transferido de um lugar para outro. Milhões desses instrumentos podem ser operados a partir de apenas uma planta desse tipo. Mais importante do que tudo isso, no entanto, será a transmissão de energia, sem fios, que será mostrada em uma escala grande o suficiente para transmitir convicção” (Tesla, 1908, tradução nossa).

**Figura 6 – Bobina tesla de 12 metros de altura construída pelo engenheiro eletricitista californiano Greg Leyh (Museum of Discovery, 2024).**



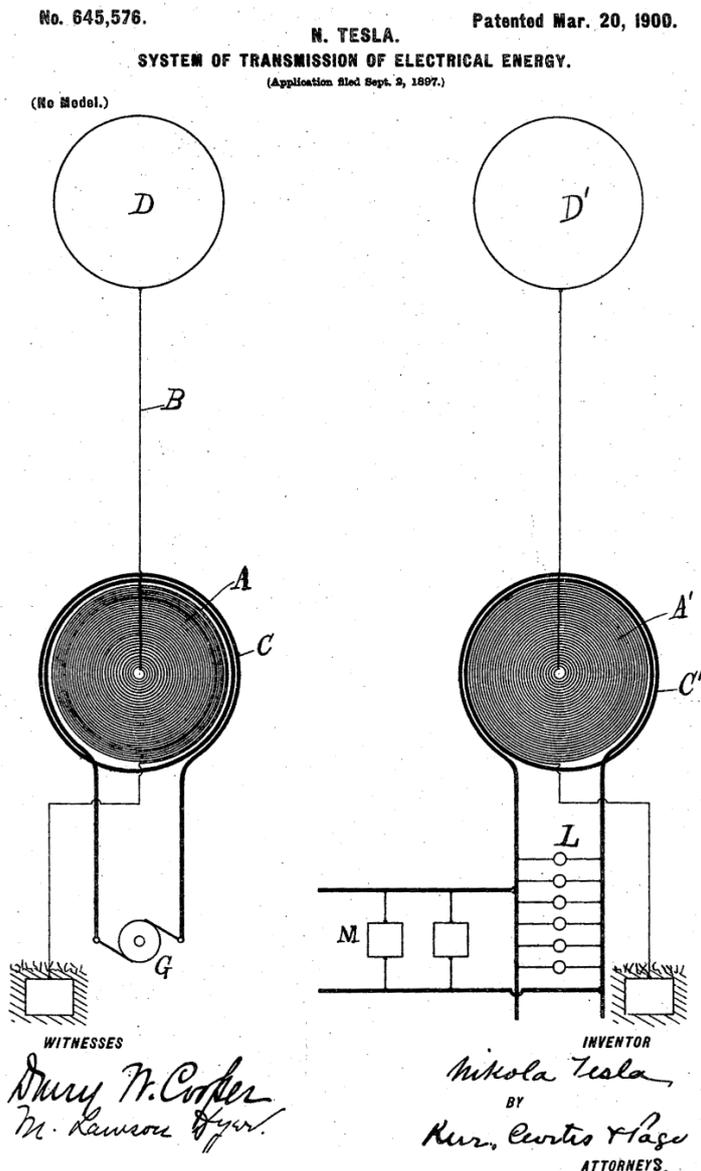
**Figura 7 – Instalações de Wardencllyffe em Long Island (Tesla, 1908, p. 68).**



Os planos grandiosos de Tesla para Wardenclyffe exauriram seus recursos e a paciência de seus investidores. Em 1906, Tesla e sua equipe tiveram que abandonar a construção de Wardenclyffe e, em 1917, a torre inacabada foi demolida e vendida como sucata para saldar dívidas da Tesla (Tesla Science Center at Wardenclyffe, 2024). Em dezembro de 1901, no mesmo ano do início da construção de Wardenclyffe, o italiano Guglielmo Marconi inaugura a era das telecomunicações de longa distância ao transmitir e receber sinais através do Atlântico Norte.

É importante registrar que, embora Marconi tenha recebido os créditos pela invenção do rádio, o pedido de patente de Tesla é anterior ao de Marconi. Tesla registrou seus pedidos de patente do rádio em 1897 e eles foram concedidos em 1900. O primeiro pedido de patente de Marconi na América, depositado em 10 de novembro de 1900, foi recusado. Entretanto, quatro anos mais tarde, o Escritório de Patentes dos EUA reverteu suas decisões anteriores e deu a Marconi uma patente pela invenção do rádio. As razões para isso nunca foram totalmente explicadas, mas o poderoso apoio financeiro a Marconi nos Estados Unidos sugere uma possível explicação. Em 1943, após a morte de Tesla, a Suprema Corte dos EUA confirmou o número de patente de rádio da Tesla 645.576 (Figura 8). Nesta época, o governo dos EUA estava sendo processado pela empresa de Marconi pelo uso de suas patentes na Primeira Guerra Mundial. A Corte simplesmente evitou a ação ao restaurar a prioridade da patente de Tesla sobre a de Marconi (Sarkar et al., 2006, p. 92-99). Sobre essa controvérsia, Brenner (2009, p. 1042, tradução nossa) é enfático: “Tesla foi o primeiro a inventar o rádio. Marconi realmente não inventou o rádio, ele apenas combinou, copiou e adaptou patentes de Tesla e outros e as comercializou como suas próprias patentes. Ele morreu com muita glória e riqueza, enquanto Tesla morreu como um homem pobre”.

Figura 8 – Ilustração da patente de rádio de Tesla (Tesla, 1900).



A bobina de Tesla foi originalmente concebida como um transmissor sem fio, e foi de fato utilizada em transmissores de rádio frequência no início do século XX. A ideia de se transmitir eletricidade sem fio à distância acabou se mostrando inviável e, com a evolução dos dispositivos de radiofrequência, a bobina Tesla entrou em desuso nessas aplicações. Desde os anos 1920, a maior parte do interesse no dispositivo tem se concentrado em sua capacidade de gerar altas tensões através da carga do circuito secundário. A bobina de Tesla prontamente serviu para “muitos experimentos, alguns interessantes em seu efeito, outros úteis em pesquisas científicas. Ondas para mensagens sem fio podem ser enviadas para o espaço, tubos de raios-X excitados, tubos Geissler<sup>2</sup> iluminados, belos efeitos de pincel mostrados e muitas outras coisas feitas” (Cunningham, 1920, p. 84, tradução nossa). O próprio Tesla usou versões de sua invenção para investigar fluorescência, raios X, efeitos biológicos e a natureza eletromagnética da Terra e sua atmosfera (PBS, 2024). Atualmente, as bobinas Tesla são usadas principalmente com finalidades didáticas ou para entretenimento, sendo exibidas como atrações em museus e utilizadas para demonstrar princípios de eletricidade de alta frequência em instituições de ensino.

O desenvolvimento dos semicondutores, permitiu a construção de bobinas Tesla de estado sólido, que apresentam semelhanças com a bobina tradicional e com os conversores chaveados do tipo *flyback*. A bobina de Tesla de estado sólido elimina o uso do centelhador, utilizando dispositivos semicondutores de potência, como tiristores e transistores (MOSFETs, IGBTs ou BJTs), para excitar o enrolamento primário, sem introduzir as desvantagens do centelhador: “Centelhadores produzem emissões de rádio de banda larga que interferem com os rádios a uma distância significativa. [...] são interruptores ineficientes [...] produzem sons altos, radiação UV, ozônio e outros perigos” (Soleyman, 2012, p.11, tradução nossa).

Depois da época de Tesla, a transmissão de energia sem fio permaneceu relativamente adormecida por várias décadas, pois mostrava-se uma tecnologia ineficiente, cara e insegura. Mas, com o uso generalizado de pequenos dispositivos portáteis com baterias que precisam de recarga constante, a atenção dos pesquisadores voltou-se novamente para a energia sem fio. Em 2007, um grupo de pesquisadores do MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) transmitiu energia sem fio através da ressonância magnética para uma lâmpada de 60 watts a mais de oito metros de distância com eficiência de 40% e batizou essa tecnologia de *WiTricity - Wireless elecTricity* (BBC, 2024). No mesmo ano, a *WiTricity Corporation* foi criada para comercializar a nova tecnologia do MIT, “levando a energia sem fio para eletrônicos de consumo e uma série de outros dispositivos, incluindo carros elétricos, dispositivos médicos e, até mesmo, veículos submarinos remotos”. (MIT, 2024a, tradução nossa). Após 2007, segundo Joseph (2018, p. 145) vários avanços ocorreram na história da transferência de energia sem fio, com a eficiência aumentando de 70% para mais de 95% e a distância da transferência de alguns centímetros para vários metros. Por exemplo, em 2014, a tecnologia *WiTricity* carregava dispositivos a uma distância de até 30 cm com cerca 95% de eficiência – 12 W para dispositivos móveis e até 6,6 kW para automóveis (MIT, 2024b).

### 3 RESSONÂNCIA EM PARALELO IDEAL

A configuração analisada na primeira parte do artigo foi o circuito ressonante série, uma combinação série dos elementos resistor ( $R$ ), indutor ( $L$ ) e capacitor ( $C$ ) com uma fonte de tensão senoidal de amplitude  $V_m$ , com impedância de entrada igual a

$$\hat{Z}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (8)$$

As expressões matemáticas da Tabela 2, que descrevem o comportamento do circuito ressonante série ideal, foram deduzidas e apresentadas na primeira parte do artigo (Villaça, 2023, p. 13-18).

<sup>2</sup> Inventado pelo físico alemão Johann Heinrich Wilhelm Geissler em 1857, o tubo de Geissler é um cilindro de vidro selado com um eletrodo de metal em cada extremidade e foi o primeiros tubo de descarga de gás. Quando a tensão é aplicada ao aparelho, a corrente elétrica flui através do tubo fazendo com que seu conteúdo seja fluorescente (Science History Institute, 2024).

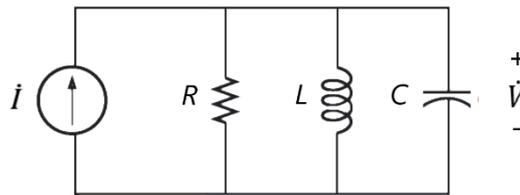
**Tabela 2 – Relações matemáticas do circuito série ideal.**

Grandeza Física	Equação
Resposta em frequência da amplitude da corrente $I =  \dot{I}(j\omega) $ (A)	$\frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ (9)
Amplitude da corrente na ressonância $I_0$ (A)	$V_m/R$ (10)
Fator de qualidade $Q$	$\omega_o L/R$ (11)
	$1/\omega_o RC$ (12)
Largura de Banda $B$ (rad/s)	$B = R/L$ (13)
Impedância em função de $Q$ , $\dot{Z}(j\omega)$ ( $\Omega$ )	$R \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \right]$ (14)
Resposta em frequência em termos de $Q$ e $\omega_o$ , $I =  \dot{I}(j\omega) $ (A)	$\frac{V_m}{R \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}}$ (15)
Tensão de pico no capacitor ou no indutor na ressonância $V_C, V_L$ (V)	$I_m Q$ (16)
Frequência de meia potência inferior em função dos parâmetros do circuito $\omega_1$ (rad/s)	$-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$ (17)
Frequência de meia potência superior em função dos parâmetros do circuito $\omega_2$ (rad/s)	$\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$ (18)

O circuito ressonante paralelo mostrado na Figura 9, é uma combinação em paralelo dos elementos  $R$ ,  $L$  e  $C$  e de uma fonte de corrente senoidal de amplitude  $I_m$ . Em um circuito série, a impedância era mínima na ressonância, produzindo uma corrente máxima que resultava em valores elevados de tensão sobre  $L$  e  $C$ . No circuito paralelo, a admitância é mínima na ressonância, produzindo uma tensão máxima que resulta em valores elevados de corrente em  $L$  e  $C$ . A admitância equivalente do circuito RLC paralelo é expressa por

$$\dot{Y}(j\omega) = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (19)$$

**Figura 9 – Circuito RLC paralelo.**



A ressonância ocorre quando a susceptância  $\dot{B}$  é zero, ou seja, quando na Equação 9

$$\omega C - 1/\omega L = 0 \quad (20)$$

Resolvendo a Equação 20 para  $\omega = \omega_o$ , resulta

$$\omega_o = 1/\sqrt{LC} \quad (21)$$

que é a mesma expressão utilizada para o cálculo da ressonância do circuito série. Observe que na ressonância, a associação  $LC$  em paralelo comporta-se como um circuito aberto ( $\dot{B} = 0 \rightarrow \dot{X} = \infty$ ) e, portanto, toda a corrente da fonte flui através de  $R$ .

Explora-se a dualidade entre os circuitos série e paralelo, comparando as Equações 8 e 19. Assim, as expressões para o circuito paralelo são obtidas substituindo nas equações do circuito série  $R, L$  e  $C$  por  $1/R, C$  e  $L$ , respectivamente. Os resultados são apresentados na Tabela 3. Na Tabela 4 foram reunidas as expressões

que são válidas para os circuitos série e paralelo. Lembra-se que as expressões (34), (35) e (37) são aproximações válidas quando o fator de qualidade  $Q$  for elevado ( $Q \geq 10$ ).

**Tabela 3 – Relações matemáticas do circuito paralelo ideal.**

Grandeza Física	Equação
Resposta em frequência da amplitude da tensão $V =  \dot{V}(j\omega) $ (V)	$\frac{I_m}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \quad (22)$
Amplitude da tensão na ressonância $V_0$ (V)	$I_m R \quad (23)$
Fator de qualidade $Q$	$\omega_o RC \quad (24)$
	$R/\omega_o L \quad (25)$
Largura de Banda $B$ (rad/s)	$B = 1/RC \quad (26)$
Admitância em função de $Q$ , $\dot{Y}(j\omega)$ (S)	$\frac{1}{R} \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \right] \quad (27)$
Resposta em frequência em termos de $Q$ e $\omega_o$ , $V =  \dot{V}(j\omega) $ (V)	$\frac{I_m R}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}} \quad (28)$
Corrente de pico no capacitor ou no indutor na ressonância $I_C, I_L$ (A)	$I_m Q \quad (29)$
Frequência de meia potência inferior em função dos parâmetros do circuito $\omega_1$ (rad/s)	$-\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (30)$
Frequência de meia potência superior em função dos parâmetros do circuito $\omega_2$ (rad/s)	$\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (31)$

**Tabela 4 – Relações matemáticas válidas para os circuitos série e paralelo.**

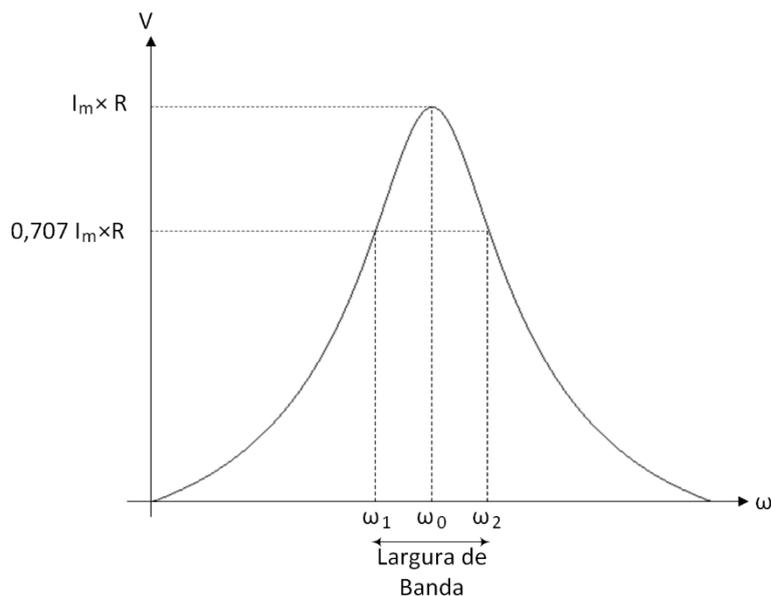
Grandeza Física	Equação
Frequência de meia potência inferior $\omega_1$ (rad/s) para $Q \leq 10$	$-\frac{\omega_o}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_o}{2Q}\right)^2 + \omega_o^2} \quad (32)$
Frequência de meia potência superior $\omega_2$ (rad/s) para $Q \leq 10$	$\frac{\omega_o}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_o}{2Q}\right)^2 + \omega_o^2} \quad (33)$
Frequência de meia potência inferior $\omega_1$ (rad/s) para $Q > 10$	$\omega_o - \frac{B}{2} \quad (34)$
Frequência de meia potência superior $\omega_2$ (rad/s) para $Q > 10$	$\omega_o + \frac{B}{2} \quad (35)$
Frequência de ressonância $\omega_o$ (rad/s) para $Q \leq 10$	$\sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (36)$
Frequência de ressonância $\omega_o$ (rad/s) para $Q > 10$	$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (37)$

A resposta em frequência do circuito paralelo da Figura 9, representada matematicamente pela Equação 22, é mostrada na Figura 10, onde se indica a amplitude da tensão na ressonância e nas frequências de meia potência inferior  $\omega_1$  e superior  $\omega_2$ , bem como a largura de banda  $B$ .

#### 4 RESSONÂNCIA COM COMPONENTES REAIS

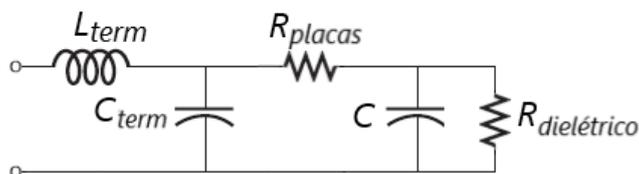
As características de impedância dos elementos passivos (resistores, capacitores, indutores) utilizados na teoria dos circuitos são assíntotas de baixa frequência das respostas de frequência desses componentes, modelos que são normalmente inadequados para altas frequências. Assim, os modelos dos componentes passivos devem ser aprimorados, a fim de modelar com precisão esses componentes na análise dos circuitos ressonantes.

**Figura 10 – Resposta em frequência da amplitude da tensão do circuito paralelo.**



O modelo equivalente de um capacitor real mostrado na Figura 11 inclui, além da capacitância do elemento, a impedância dos terminais, a resistência das placas condutoras e a resistência do dielétrico. A resistência dielétrica considera as perdas ôhmicas e de polarização no material dielétrico. A resistência dielétrica é geralmente tão grande que pode ser ignorada enquanto a capacitância dos terminais é normalmente muito pequena em comparação com a capacitância do elemento, de modo que a capacitância dos terminais pode ser desprezada.

**Figura 11 – Circuito equivalente do capacitor real.**

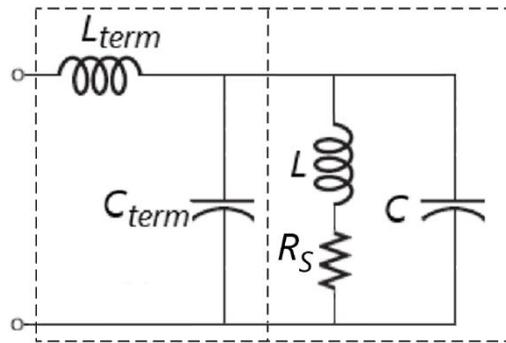


Essas aproximações produzem o modelo simples RLC série para o capacitor mostrado na Figura 12, o qual indica que o capacitor real é um circuito RLC série. Nesse modelo a indutância dos terminais é conhecida como indutância série equivalente (LSE) e a resistência das placas como resistência série equivalente (RSE). Esse modelo indica que o capacitor apresenta uma frequência de ressonância quando acionado por um sinal periódico. Em baixa frequência, a impedância fornecida pela capacitância é dominante e o capacitor apresentará um comportamento próximo do ideal. Em uma frequência suficientemente alta, a reatância indutiva se iguala à capacitiva, produzindo um efeito conhecido como auto ressonância, ou seja, quando excitados os capacitores tendem à ressonância em frequências específicas. Acima da frequência de ressonância a parcela indutiva do capacitor prevalece. O fenômeno da auto ressonância acontece também com os outros elementos passivos.

**Figura 12 – Modelo equivalente simplificado do capacitor.**



O esquema da Figura 13 apresenta o circuito equivalente de um indutor real, onde a resistência do enrolamento do indutor é representada por  $R_S$ . Essa resistência apresenta uma componente CC e uma componente CA que representa as perdas por correntes parasitas no enrolamento. As correntes parasitas são laços de corrente induzidos pela variação de campos magnéticos de acordo com a lei de Faraday e fluem nos condutores em planos perpendiculares aos campos magnéticos. Essas correntes causam os efeitos Skin e de proximidade, sendo que ambos aumentam com a elevação da frequência de operação do indutor.

**Figura 13 – Modelo equivalente do indutor real.**

O efeito de proximidade descreve a influência de campos magnéticos adjacentes nas correntes de um condutor. Quando dois ou mais condutores que transportam corrente alternada estão próximos um do outro, a distribuição da corrente em cada condutor é afetada devido à variação do campo magnético dos outros. O campo magnético variável produzido pela corrente alternada induz correntes parasitas nos condutores adjacentes. Devido a isso, quando os condutores próximos transportam corrente na mesma direção, a corrente se concentra no lado oposto dos condutores. Quando os condutores próximos transportam corrente em direções opostas entre si, a corrente se concentra nas partes mais próximas dos condutores. Este efeito de concentração da corrente reduz a seção transversal efetiva do condutor, aumentando a sua resistência elétrica.

O efeito Skin ou pelicular é a tendência da corrente alternada se concentrar próximo à superfície do condutor, reduzindo a sua seção transversal efetiva e, conseqüentemente, a exemplo do efeito de proximidade, aumentando a sua resistência efetiva. O efeito pelicular também envolve a indução de correntes parasitas, mas aqui elas são causadas pela corrente dentro do próprio condutor. Como o campo magnético atua em torno do eixo do condutor, as correntes parasitas são induzidas de tal forma que, próximo ao eixo do fio, elas fluem na direção oposta à corrente principal, diminuindo assim a densidade da corrente. Perto da superfície, a direção das correntes parasitas coincide com a corrente principal, aumentando a densidade da corrente local.

A descrição clássica para a capacitância parasita  $C$  é que ela representa a capacitância distribuída entre espiras do indutor (e entre espiras e núcleo etc.). Essa capacitância parasita aumenta significativamente quando são empregadas técnicas de economia de espaço de enrolamento, tais como múltiplas camadas de bobinas. Knigh (2016), porém, discorda da escola de pensamento que diz que a auto capacitância se deve

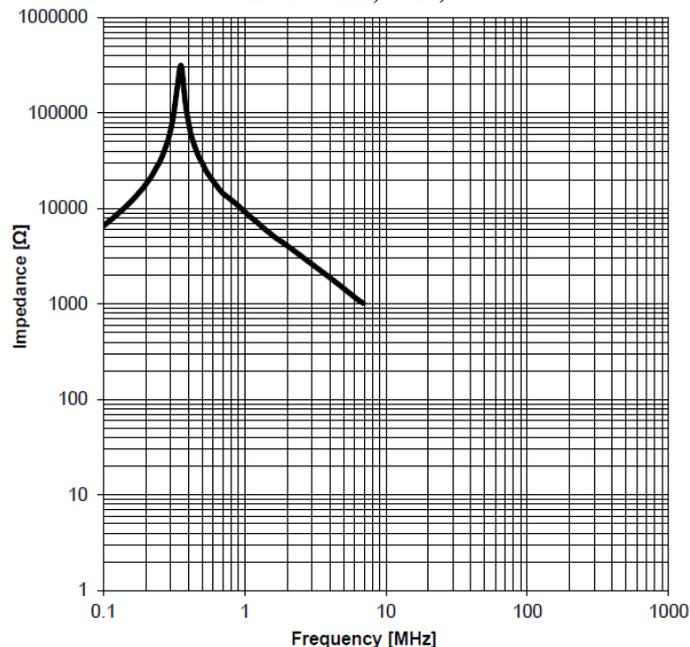
“às capacitâncias que se presume existem entre espiras adjacentes; e embora isso seja parcialmente verdade para bobinas multicamadas e espirais planas, a hipótese acaba sendo um preditor inútil da reatância de solenoides de camada única com  $Q$  elevado (...) Uma possível solução reside em reconhecer que a bobina é uma linha de transmissão; embora a linha em questão seja bastante complicada” (Knigh, 2016, p. 13, tradução nossa).

No entanto, não há discordância que em alguma frequência, designada por frequência auto ressonante ou SRF<sup>3</sup>, essa auto capacitância forma uma ressonância paralela com a indutância  $L$  e o indutor se torna um circuito sintonizado. A Figura 14 apresenta a resposta em frequência de um indutor comercial que apresenta uma frequência auto ressonante típica de 260 kHz.

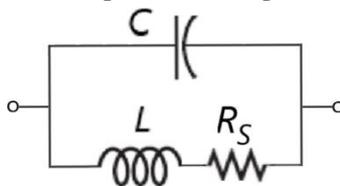
A indutância dos terminais é normalmente muito menor que a indutância  $L$  do indutor podendo ser desprezada. Além disso, na maioria circunstâncias, a auto capacitância de um indutor típico é significativamente maior que a capacitância dos terminais. Assim, o modelo equivalente do indutor pode ser aproximado por uma combinação em série da indutância do indutor e da resistência  $R_S$  em paralelo com a capacitância parasita  $C$  do indutor. Observe que o efeito dos elementos dos terminais é muito menos crítico para o indutor do que para o capacitor. Uma versão simplificada do circuito equivalente do indutor é mostrada na Figura 15.

<sup>3</sup> Na verdade, há inúmeras ressonâncias. A SFR é a frequência de ressonância mais baixa entre um indutor e sua auto capacitância, sendo chamada de primeira auto ressonância (Coilcraft, 2024).

**Figura 14 – Resposta em frequência de um indutor comercial de 10 mH (Würth Elektronik, 2023).**



**Figura 15 – Modelo equivalente simplificado do indutor.**



Em indutores com núcleo de material magnético, o campo magnético alternado provoca perdas no material que podem ser modeladas razoavelmente acrescentando um resistor paralelo ( $R_p$ ) ao modelo da Figura 15. As perdas totais do núcleo dependem do material do núcleo, da frequência e variação total de fluxo magnético e são compostas por três componentes principais: histerese, correntes parasitas e perdas anômalas. As perdas por histerese expressam a dificuldade que o campo magnético ( $H$ ) terá para orientar os domínios de um material ferromagnético. As correntes parasitas ou de Foucault, por sua vez, são as correntes produzidas pelas forças eletromotrizes induzidas no interior do núcleo pelo fluxo magnético variável e dependem da resistividade do material. As perdas anômalas causadas pelo movimento das paredes dos domínios magnéticos (a região que separa os domínios) podem ser caracterizadas, de forma simplificada, como perdas excedentes, ou seja, as perdas que sobram após as perdas por histerese e por correntes parasitas serem deduzidas das perdas totais.

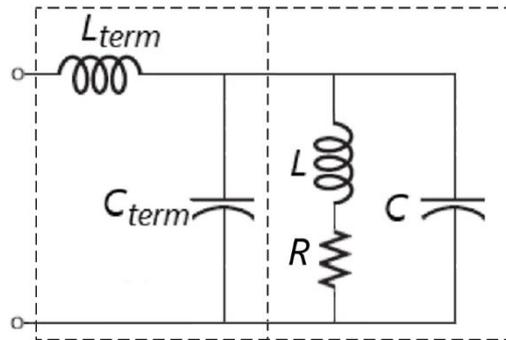
É importante ainda registrar que, a suposição de que a indutância dos indutores com núcleo de material magnético é um valor constante, é correta apenas se o indutor estiver operando muito abaixo do seu ponto de saturação, no qual a corrente do indutor e o campo magnético forçado por ela diminuirão a permeabilidade do núcleo magnético e, portanto, a indutância. Nas folhas de dados dos fabricantes, a corrente de saturação é definida como a corrente contínua aplicada na qual o valor da indutância cai um valor percentual especificado abaixo do seu valor medido sem corrente, ou seja, quando a corrente contínua no indutor atinge o valor da corrente de saturação, o valor da indutância diminui uma certa porcentagem, geralmente 30% (Texas Instruments, 2004). Existem dois tipos de saturação, saturação forte (*hard*) e saturação suave (*soft*). Na saturação forte, a indutância diminui abruptamente após a saturação, enquanto que na saturação suave a queda na indutância é gradual.

O modelo equivalente de um resistor real inclui uma capacitância  $C$  devido à fuga de carga ao longo do corpo do resistor e deve incluir os componentes de impedância associados à construção do resistor<sup>4</sup> junto com

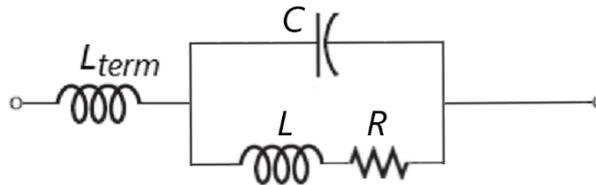
<sup>4</sup> Principais tipos de resistores fixos: resistores de fio, resistores de carbono, resistores de filme de carbono, resistores de filme metálico, resistores de filme de óxido metálico, resistores de esmalte metálico e resistores de folha de metal.

o efeito dos seus terminais. No circuito equivalente típico de um resistor mostrado na Figura 16 e apresentado por Vishay (2024) é incluída uma indutância  $L$  devida ao comprimento do resistor e afetada pelo efeito pelicular. O efeito pelicular reduz o campo magnético no interior do resistor, pois o campo fica confinado em um volume menor à medida que a frequência aumenta, diminuindo assim a indutância. As capacitâncias dos terminais e de fuga podem ser associadas em paralelo para formar a capacitância do resistor, gerando a forma simplificada do circuito equivalente do resistor apresentado na Figura 17.

**Figura 16 – Circuito equivalente do resistor real.**

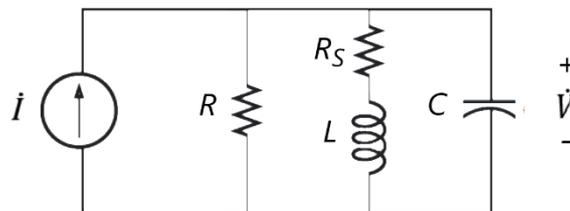


**Figura 17 – Modelo equivalente simplificado do resistor.**



Em face ao exposto nesta seção, observa-se que as configurações dos circuitos ressonantes reais diferem das configurações RLC clássicas já discutidas. Para oferecer uma visão sobre o comportamento de topologia mais complexas, será discutido o equacionamento de uma topologia ressonante híbrida, onde se avaliará o impacto da resistência dos enrolamentos do indutor, representada por  $R_S$ , na condição de ressonância de um circuito RLC paralelo clássico. Esse circuito híbrido é mostrado na Figura 18.

**Figura 18 – Circuito RLC paralelo híbrido.**



Considere o circuito RLC em paralelo da Figura 18. Sua admitância equivalente vale

$$\dot{Y}(j\omega) = \frac{1}{R} + jB_C + \frac{1}{R_S + jX_L} \quad (38)$$

Multiplicando, ambos, o numerador e o denominador do termo à direita da Equação 38 pelo complexo conjugado de seu denominador, resulta

$$\dot{Y}(j\omega) = \frac{1}{R} + jB_C + \frac{R_S - jX_L}{R_S^2 + X_L^2} \quad (39)$$

Decompondo a Equação 39 em suas partes real e imaginária, obtém-se

$$\dot{Y}(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{R_S}{R_S^2 + (\omega L)^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L}{R_S^2 + (\omega L)^2} \right) \quad (40)$$

Na ressonância,  $\omega = \omega_0$  e  $jB = 0$ . Assim, a partir da Equação 40 resulta:

$$\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{R_S^2 + (\omega_0 L)^2} \quad (41)$$

Simplificando e prosseguindo,

$$R_S^2 + \omega_0^2 L^2 = \frac{L}{C} \quad (42)$$

Isolando-se  $\omega_0^2$  em (42), resulta

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R_S^2}{L^2}$$

Após mais algumas manipulações, obtém-se

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_S^2}{Z_0^2}} \quad (\text{rad/s}) \quad (43)$$

onde

$$Z_0 = \sqrt{L/C} \quad (44)$$

A partir Equação 40, obtém a condutância na ressonância, ou seja,

$$\dot{G}(j\omega_0) = \frac{1}{R} + \frac{R_S}{R_S^2 + (\omega_0 L)^2} \quad (45)$$

Substituindo a Equação 42 na Equação 45, resulta:

$$\dot{G}(j\omega_0) = \frac{1}{R} + \frac{R_S C}{L} \quad (46)$$

Em  $\omega = \omega_0$  a admitância de entrada de um circuito ressonante paralelo será próxima ao seu valor mínimo, mas não exatamente seu valor mínimo devido à dependência da frequência de  $\dot{G}$ . A frequência  $\omega_m$  na qual ocorre a admitância mínima, portanto, a máxima amplitude da tensão, é um pouco maior que  $\omega_0$ , como pode ser demonstrado. A frequência  $\omega_m$ , então, pode ser determinada igualando a zero a derivada da magnitude da admitância do circuito. A magnitude da admitância do circuito obtida a partir da Equação 40 vale:

$$|\dot{Y}(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{R} + \frac{R_S}{R_S^2 + (\omega L)^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R_S^2 + (\omega L)^2}\right)^2} \quad (47)$$

Derivando a Equação 47, resulta:

$$\frac{d|\dot{Y}(j\omega)|}{d\omega} = \frac{\left(\frac{2L^3\omega^2}{(L^2\omega^2 + R_S^2)^2} - \frac{L}{L^2\omega^2 + R_S^2} + C\right)\left(C\omega - \frac{L\omega}{L^2\omega^2 + R_S^2}\right) - \frac{2L^2R\omega\left(\frac{R_S}{L^2\omega^2 + R_S^2} + \frac{1}{R}\right)}{(L^2\omega^2 + R_S^2)^2}}{\sqrt{\left(C\omega - \frac{L\omega}{L^2\omega^2 + R_S^2}\right)^2 + \left(\frac{R_S}{L^2\omega^2 + R_S^2} + \frac{1}{R}\right)^2}}$$

O Módulo da admitância será mínimo quando o numerador da expressão acima for zero. Nesse caso,  $\omega = \omega_m$ . Assim,

$$\left(\frac{2L^3\omega_m^2}{(L^2\omega_m^2 + R_S^2)^2} - \frac{L}{L^2\omega_m^2 + R_S^2} + C\right)\left(C\omega_m - \frac{L\omega_m}{L^2\omega_m^2 + R_S^2}\right) - \frac{2L^2R\omega_m\left(\frac{R_S}{L^2\omega_m^2 + R_S^2} + \frac{1}{R}\right)}{(L^2\omega_m^2 + R_S^2)^2} = 0$$

Expressão que pode ser simplificada, resultando em:

$$L^4 C^2 \omega_m^4 + 2L^2 C^2 R_S^2 \omega_m^2 + \left(C^2 R_S^4 - 2LCR_S - 2\frac{1}{R}L^2 R_S - L^2\right) = 0 \quad (48)$$

Substituindo  $\omega_m^2$  por  $y$  na Equação 48, obtém-se a equação de 2º grau

$$L^4 C^2 y^2 + 2L^2 C^2 R_S^2 y + \left( C^2 R_S^4 - 2LCR_S^2 - 2\frac{1}{R}L^2 R_S - L^2 \right) = 0$$

Cujo a solução, considerando apenas o valor positivo é

$$y = -\left(\frac{R_S}{L}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{R_S}{L}\right)^4 - \frac{\left(C^2 R_S^4 - 2LCR_S^2 - 2\frac{1}{R}L^2 R_S - L^2\right)}{L^4 C^2}} \quad (49)$$

Com  $\omega_m = \sqrt{y}$ , a Equação 49 torna-se:

$$\omega_m = \sqrt{-\left(\frac{R_S}{L}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{R_S}{L}\right)^4 - \frac{\left(C^2 R_S^4 - 2LCR_S^2 - 2\frac{1}{R}L^2 R_S - L^2\right)}{L^4 C^2}}} \quad (50)$$

Após algumas manipulações algébricas da Equação 50, obtém-se

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\left( \sqrt{2\left(\frac{R_S}{Z_0}\right)^2 + 2\frac{1}{R}R_S + 1 - \left(\frac{R_S}{Z_0}\right)^2} \right)} \quad (rad/s) \quad (51)$$

que representa a frequência onde a amplitude da tensão  $\dot{V}$  do circuito RLC paralelo da Figura 18 atinge seu valor máximo.

O fator de qualidade do circuito paralelo é a razão entre a susceptância capacitiva e a admitância do circuito em  $\omega_0$  (Equação 46). Assim, para o circuito da Figura 18:

$$Q = \frac{\omega_0 C}{\frac{1}{R} + \frac{R_S}{L}} \quad (52)$$

ou

$$Q = \frac{\omega_0}{\frac{1}{RC} + \frac{R_S}{L}} \quad (53)$$

Substituindo  $\tau_P = RC$  e  $\tau_S = L / R_S$  na Equação 53 resulta

$$Q = \frac{\omega_0}{\frac{1}{\tau_P} + \frac{1}{\tau_S}} \quad (54)$$

O denominador da Equação 54 representa a largura de banda do circuito ressonante híbrido da Figura 18, ou seja,

$$B = \frac{1}{\tau_P} + \frac{1}{\tau_S} \quad (55)$$

Por último, inspecionando a Equação 43, verifica-se que, para o circuito da Figura 18 apresentar uma frequência de ressonância, é necessário satisfazer a seguinte condição:

$$R_S < Z_0 \quad (56)$$

## 5 EXPERIMENTAÇÃO E SIMULAÇÃO DE UM CIRCUITO RESSONANTE HÍBRIDO

Com o objetivo de confirmar a análise feita na seção precedente, serão realizadas a simulação e testes em laboratório do circuito da Figura 18 utilizando  $R = 990 \Omega$ ,  $R_S = 32 \Omega$ ,  $L = 10,08 \text{ mH}$  e  $C = 4,62 \mu\text{F}$ , cujos valores são os valores medidos dos componentes que serão utilizados nos testes de laboratório.

Empregando a Equação 44, calcula-se a impedância natural do circuito:

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = \sqrt{10,08 \times 10^{-3} / 4,62 \times 10^{-6}} = 46,71 \Omega$$

valor que satisfaz a condição estabelecida por (56) para ocorrência da ressonância.

Substituindo o valor acima e os valores de  $R_S$ ,  $L$  e  $C$  nas Equações 43 e 51 e dividindo por  $2\pi$ , obtém-se, respectivamente, as frequências de ressonância e de máxima amplitude da tensão  $\dot{V}$  da configuração:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{10,08 \times 10^{-3} \cdot 4,62 \times 10^{-6}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{32^2}{46,71^2}} = 737,51 \cdot 0,7285 = 537,25 \text{ Hz}$$

$$\omega_m = 737,51 \sqrt{2 \cdot \frac{32^2}{46,71^2} + 2 \cdot \frac{32}{990} + 1 - \frac{32^2}{46,71^2}} = 717,34 \text{ Hz}$$

onde 737,51 Hz seria a frequência de ressonância caso  $R_S = 0$ , ou seja, a frequência de ressonância do circuito RLC paralelo clássica.

Considerando-se uma fonte de corrente convenientemente escolhida de 1 A, a amplitude das tensões na ressonância, na frequência de máxima amplitude  $f_m = 717,34 \text{ Hz}$  e nas frequências arbitrariamente escolhidas de  $f_1 = 200 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 1.000 \text{ Hz}$  e  $f_3 = 2.000 \text{ Hz}$  serão calculadas utilizando o recíproco da admitância, ou seja,  $|\dot{V}| = 1/|\dot{Y}|$ . Assim, utilizando o recíproco da Equação 46, obtém:

$$|\dot{V}(j\omega_0)| = \left(\frac{1}{R} + \frac{R_S C}{L}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{990} + \frac{32 \cdot 4,62 \times 10^{-6}}{10,08 \times 10^{-3}}\right)^{-1} = 63,79 \text{ V}$$

Utilizando o recíproco da Equação 47 em  $f_1$ , obtém-se:

$$|\dot{V}(j2\pi f_1)| = \sqrt{\left(\frac{1}{990} + \frac{32}{32^2 + (12,67)^2}\right)^2 + \left(5,806 \times 10^{-3} - \frac{12,67}{32^2 + (12,67)^2}\right)^2}^{-1}$$

$$|\dot{V}(j2\pi f_1)| = \sqrt{(0,0280269)^2 + (-0,0048887)^2}^{-1} = 31,15 \text{ V}$$

Substituindo os valores de  $f_m$ ,  $f_2$  e  $f_3$  na mesma equação, chega-se, respectivamente, em

$$|\dot{V}(j2\pi f_m)| = 77,46 \text{ V}$$

$$|\dot{V}(j2\pi f_2)| = 55,48 \text{ V}$$

$$|\dot{V}(j2\pi f_3)| = 19,72 \text{ V}$$

Por sua vez, a fase da tensão  $\dot{V}$  na frequência  $f_1$  pode ser obtida multiplicando-se a fase de  $\dot{Y}$  por (-1), ou seja,

$$\phi_V(j2\pi f_1) = -\text{arc tg} \left( \frac{\omega C - \frac{\omega L}{R_S^2 + (\omega L)^2}}{\frac{1}{R} + \frac{R_S}{R_S^2 + (\omega L)^2}} \right) = -\text{arc tg} \left( \frac{-0,0048887}{0,0280269} \right) = 9,9^\circ$$

Utilizando procedimento similar para as frequências  $f_m$ ,  $f_2$  e  $f_3$ , obtém-se, respectivamente,

$$\phi_V(j2\pi f_m) = -28,3^\circ$$

$$\phi_V(j2\pi f_2) = -65,9^\circ$$

$$\phi_V(j2\pi f_3) = -86,7^\circ$$

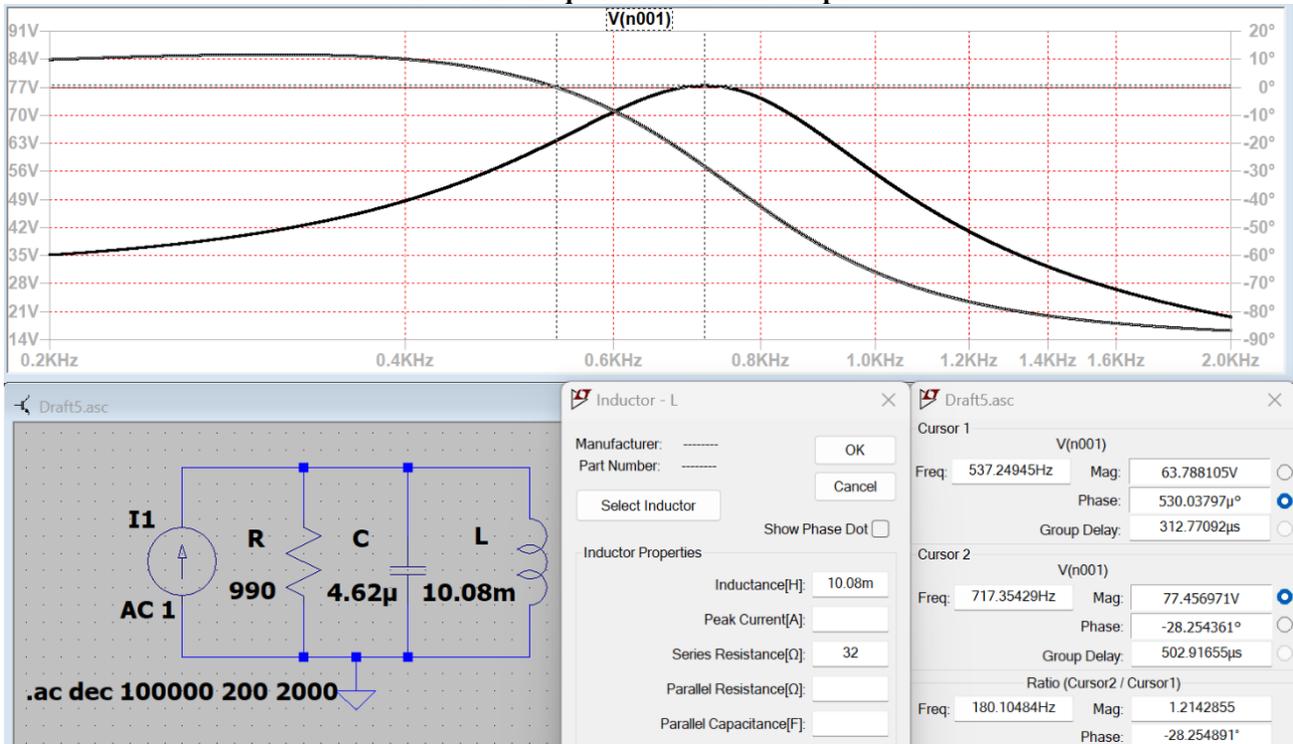
Para facilitar a comparação com resultados de simulação, reuniu-se os valores calculados na Tabela 5. Verifica-se que os valores calculados são confirmados pela simulação utilizando o software LTspice<sup>5</sup>. O circuito simulado, a resposta em frequência da tensão  $\dot{V}$  sobre circuito ressonante e as leituras dos cursores realizadas próximos à frequência de ressonância e de máxima amplitude são mostradas na Figura 19. A conformidade dos valores teóricos da Tabela 5 com os resultados da simulação validam a análise quantitativa apresentada para o circuito RLC paralelo híbrido da Figura 18. Chama-se a atenção que, no circuito paralelo RLC ideal, a ressonância e a máxima amplitude da tensão  $\dot{V}$ , cujo valor seria de 99 V, ocorreriam em 731,5 Hz, resultados obtidos pelo emprego das Equações 21 e 23.

<sup>5</sup> LTspice<sup>®</sup> é um software simulador SPICE gratuito disponibilizado pela Analog Devices, multinacional norte americana que projeta, fabrica e comercializa circuitos integrados.

**Tabela 5 – Alguns valores de tensão e frequência para o circuito ressonante da Figura 18.**

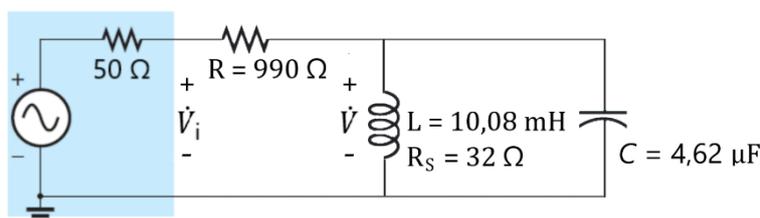
Grandeza Física	Valor
Frequência de ressonância	537,25 Hz
Frequência de máxima amplitude da tensão	717,34 Hz
Amplitude da tensão sobre o circuito na ressonância	63,79 V
Amplitude máxima da tensão sobre o circuito	77,46 V
Amplitude da tensão sobre o circuito em 200 Hz	35,15 V
Fase da tensão em 200 Hz	9,9°
Amplitude da tensão sobre o circuito em 1 kHz	55,48 V
Fase da tensão em 1 kHz	-65,9°
Amplitude da tensão sobre o circuito em 2 kHz	19,72 V
Fase da tensão em 2 kHz	-86,7°

**Figura 19 – Simulação do circuito da Figura 18 e a resposta em frequência da tensão  $\dot{V}$  sobre o circuito, onde o cursor 1 está posicionado na frequência de ressonância e o cursor 2 na frequência de máxima amplitude.**



Em laboratório foi ensaiado o circuito da Figura 20 utilizando uma fonte de tensão no lugar da fonte de corrente e os resultados obtidos são apresentados na Tabela 6. Para comparar a resposta em frequência obtida por simulação com a resposta em frequência experimental e teórica, o ganho de tensão foi transformado em impedância de transferência multiplicando-se a coluna 4 por 990.

**Figura 20 – Simulação do circuito da Figura 18 e a resposta em frequência da tensão  $\dot{V}$  sobre o circuito, onde o cursor 1 está posicionado na frequência de ressonância e o cursor 2 na frequência de máxima amplitude.**



**Tabela 6 – Resultados obtidos a partir do ensaio do circuito da Figura 19.**

Frequência (Hz)	Tensão de Entrada $V_i$ (V)	Tensão V sobre o circuito (mV)	Ganho $ \dot{H}(j\omega)  \cdot 10^{-3}$	Ganho $ \dot{H}(j\omega)  \cdot 10^{-3}$	Fase (°)
100	4,84	168	34,71	34,36	7,2
200	4,84	184	38,02	37,64	10,0
300	4,84	212	43,80	43,36	12,0
400	4,84	251	51,86	51,34	10,0
500	4,84	305	63,02	62,39	2,9
525	4,84	319	65,91	65,25	0,0
600	4,84	358	73,97	73,23	-9,0
650	4,84	378	78,10	77,32	-18,0
700	4,84	382	78,93	78,14	-26,0
720	4,84	384	79,34	78,55	-31,0
750	4,84	378	78,10	77,32	-35,0
800	4,84	362	74,80	74,05	-43,0
900	4,84	314	64,88	64,23	-56,0
1000	4,84	270	55,79	55,22	-63,0
1100	4,84	230	47,52	47,05	-69,0
1200	4,84	202	41,74	41,32	-72,0
1400	4,84	162	33,47	33,14	-76,0
1600	4,84	129	26,65	26,39	-78,0
1800	4,84	110	22,73	22,50	-79,0
2000	4,84	96	19,84	19,64	-80,0

Na Tabela 7, apresenta-se o desvio relativo percentual em valor absoluto entre os valores teóricos apresentados na Tabela 5 e os experimentais correspondentes. As diferenças observadas podem ser atribuídas à dificuldade de medir, com o equipamento utilizado, a fase da tensão para valores abaixo de 200 mV e aos fatores já listados na primeira parte deste artigo, tais como a dificuldade de realizar uma medida precisa do indutor e outros inerentes aos modelos adotados dos componentes passivos (Villaça, 2003, p. 22). Contudo, é importante salientar que, para alguns valores, o desvio foi menor ou igual a 1,0%.

**Tabela 7 – Desvio relativo entre os valores teóricos e os experimentais.**

Grandeza Física	Valor (%)
Frequência de ressonância	2,3
Frequência de máxima amplitude da tensão	0,4
Amplitude da tensão sobre o circuito na ressonância	2,3
Amplitude máxima da tensão sobre o circuito	1,4
Amplitude da tensão sobre o circuito em 200 Hz	7,1
Fase da tensão em 200 Hz	1,0
Amplitude da tensão sobre o circuito em 1 kHz	0,5
Fase da tensão em 1 kHz	4,4
Amplitude da tensão sobre o circuito em 2 kHz	0,4
Fase da tensão em 2 kHz	7,7

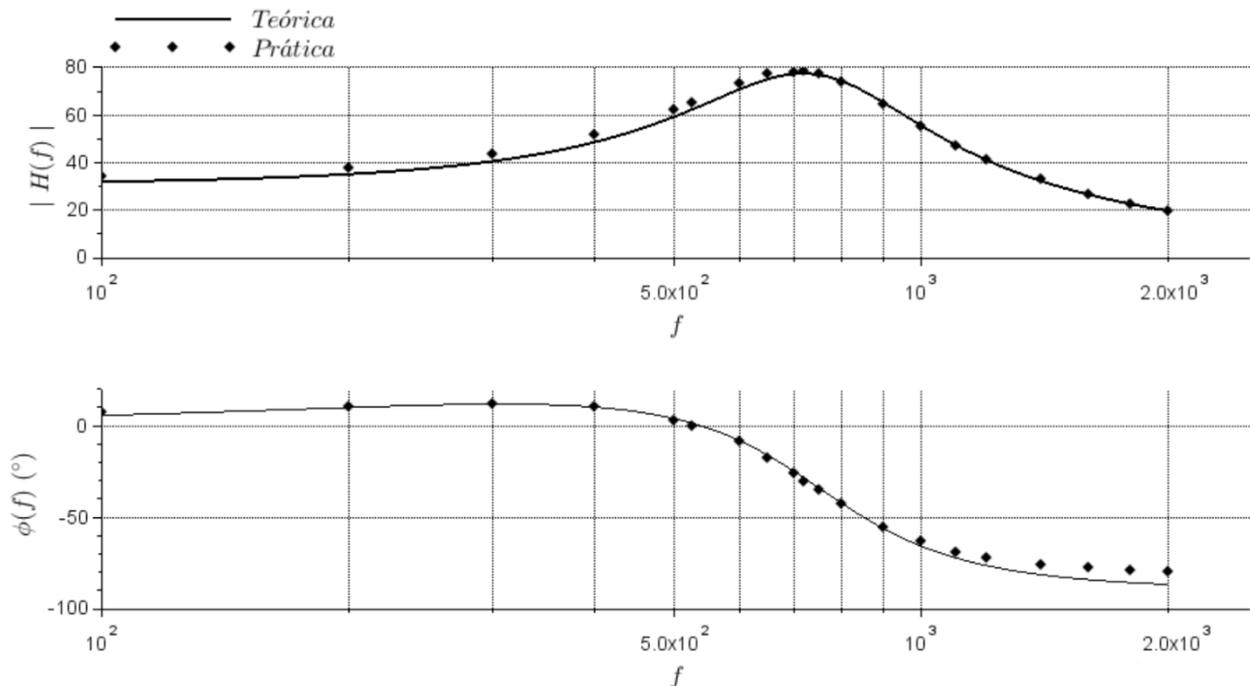
Utilizando o *script* Scilab<sup>6</sup> do Quadro 1, foram traçadas e apresentadas na Figura 21, as respostas em frequência teórica e experimental (ganho e fase em graus versus frequência) da tensão  $\dot{V}$ , cujo a conformidade válida, mais uma vez, a análise teórica.

<sup>6</sup> Criado por pesquisadores do INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) e do ENPC (École Nationale des Ponts et Chaussées) e disponível como software gratuito e de código aberto desde 1994, o Scilab<sup>®</sup> é destinado a engenheiros e cientistas. Atualmente, é desenvolvido pela Dassault Systèmes.

**Quadro 1 – Script Scilab® elaborado para traçar as respostas em frequência teórica e experimental do circuito da Figura 20.**

```
f = 100:0.01:2000;
w = 2*pi*f;
R = 990;
L = 10.08d-3;
C = 4.62d-6;
RS = 32;
Y = 1/R + %i*w*C + 1./(RS + %i*w*L);
H = 1./Y;
subplot(211);
plot2d(f, abs(H), logflag = "ln");
xgrid;
fp = [100:100:500 525 600 650 700 720 750 800:100:1100 1200:200:2000];
G = 990 * [168 184 212 251 305 319 358 378 382 384 378 362 314 270 230 202 162 129 110
96] / 4840;
plot2d(fp, G, logflag = "ln", -4);
xlabel("\scalebox{1.8}{f}");
ylabel("\scalebox{1.8}{| H(f) |}");
a = get("current_axes");
a.labels_font_size = 3;
a.data_bounds = [100, 0; 2000, 80];
poly1 = a.children.children;
poly1.thickness = 2;
legend(['Teórica'; 'Prática'], pos = -5, boxed = %f);
gce().font_size = 4;
subplot(212);
plot2d(f, atand(imag(H), real(H)), logflag = "ln");
xgrid;
phi = [7.2 10 12 10 2.9 0 -9 -18 -26 -31 -35 -43 -56 -63 -69 -72 -76 -78 -79 -80];
plot2d(fp, phi, logflag = "ln", -4);
xlabel("\scalebox{1.8}{f}");
ylabel("\scalebox{1.8}{\phi (f) \ (\text{\circ})}");
a = get("current_axes");
a.data_bounds = [100, -100; 2000, 20];
a.labels_font_size = 3;
```

**Figura 21 – Respostas em frequência teórica e experimental do circuito da Figura 20.**



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ressonância, um fenômeno físico importante que pode ocorrer em circuitos eletroeletrônicos, apresenta muitas possibilidades de aplicação, ao mesmo tempo que apresenta riscos potenciais aos circuitos que os profissionais da área devem compreender. Uma aplicação apresentada nesse artigo é o seu emprego no carregamento sem fio de dispositivos eletrônicos, incluindo carros elétricos. O carregamento sem fio passou a ser uma possibilidade quando, em 1831, Faraday demonstrou que a energia eletromagnética poderia ser transmitida através do espaço. No final do século XIX, baseado nos estudos de Faraday e de outros cientistas, Nikola Tesla conduziu experimentos sobre transmissão de energia sem fio e propôs um sistema global de transmissão sem fio de eletricidade. Entretanto, um obstáculo fundamental para concretizar essa visão ambiciosa sempre foi a ineficiência da transferência de energia a longas distâncias.

Transcorridos mais de cem anos, mais exatamente em 2007, um grupo de pesquisadores do MIT transmitiu energia sem fio para uma lâmpada de 60 watts com eficiência de 40%. O sistema do MIT emprega basicamente a mesma tecnologia proposta por Tesla, ou seja, transfere energia entre duas bobinas operando na mesma frequência ressonante. As bobinas podem ser fracamente acopladas, mas exigem um alto fator de qualidade Q para a transferência de energia ser mantida ao longo de vários centímetros.

As características de impedância de resistores, capacitores e indutores apresentadas nos livros de circuitos elétricos são inadequadas para altas frequências, devendo ser aperfeiçoadas para representar mais fidedignamente o comportamento desses componentes nos circuitos ressonantes. Quando um resistor, um capacitor ou um indutor é usado em aplicações de alta frequência, ele pode causar uma ressonância não intencional em uma determinada frequência devido aos componentes parasitas que o constituem e que foram aqui discutidos.

Nesse trabalho, avaliou-se o impacto da resistência dos enrolamentos do indutor na condição de ressonância de um circuito RLC paralelo clássico, apresentando um estudo teórico que foi validado por simulação e em ensaio de laboratório.

### *Agradecimentos*

O autor agradece ao colega Fernando Luiz Rosa Mussoi pela cuidadosa revisão do texto e suas valiosas contribuições.

### REFERÊNCIAS

BBC. **Wireless energy promise powers up**. Disponível em: <<http://news.bbc.co.uk/2/hi/technology/6725955.stm>>. Acesso em: 20 mar. 2024.

BRENNER, P. Tesla against Marconi: The dispute for the radio patent paternity. **IEEE EUROCON 2009**, St. Petersburg, Russia, 2009, pp. 1035-1042.

BURNETT, Richard. **Tesla coil operation**. Disponível em: <<http://www.richieburnett.co.uk/tesla.shtml>>. Acesso em: 3 mar. 2024.

COILCRAFT. **Measuring self resonant frequency**. Disponível em: <[https://www.coilcraft.com/getmedia/8ef1bd18-d092-40e8-a3c8-929bec6adfc9/doc363\\_measuringsrf.pdf](https://www.coilcraft.com/getmedia/8ef1bd18-d092-40e8-a3c8-929bec6adfc9/doc363_measuringsrf.pdf)>. Acesso em: 4 mar. 2024.

CUNNINGHAM, Elmer T. e HALLER George F. **The Tesla high frequency coil: its construction and uses**. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2010.

HUYS, Nick. **Tesla: master of lightning**. Nicky Huys, 2024. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=X1XpEAAAQBAJ>>. Acesso em: 4 mar. 2024.

JOSEPH, Peter K. e ELANGOVAN, D. A review on renewable energy powered wireless power transmission techniques for light electric vehicle charging applications. **Journal of Energy Storage**, v. 16, 2018, p 145-155. <https://doi.org/10.1016/j.est.2017.12.019>.

KNIGHT, D. **The self-resonance and self- capacitance of solenoid coils: applicable theory, models and calculation methods**. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1472.0887>>.

MIT. **Wireless power**. Disponível em: <<https://betterworld.mit.edu/wireless-power>>. Acesso em: 20 mar. 2024a.

MIT. **Making a wire-free future**. Disponível em: <<https://news.mit.edu/2014/making-wire-free-future-0710>>. Acesso em: 20 mar. 2024b.

MUSEUM OF DISCOVERY. **See world’s largest Tesla coil shoot 60-foot bolts of lightning at “Shock the rock”**. Disponível em: <<https://museumofdiscovery.org/see-worlds-largest-tesla-coil-shoot-60-foot-bolts-of-lightning-at-shock-the-rock>>. Acesso em: 4 mar. 2024.

PBS. **The Tesla Coil**. Disponível em: <[https://www.pbs.org/tesla/ins/lab\\_tescoil.html](https://www.pbs.org/tesla/ins/lab_tescoil.html)>. Acesso em: 6 mar. 2024.

SARKAR, T.K.; MAILLOUX, R.; OLINER, A.A.; SALAZER-PALMA, M.; SENGUPTA, D.L. **History of Wireless**. Wiley, 2006.

SCIENCE HISTORY INSTITUTE. **Geissler tube**. Photograph, 2021. Disponível em: <<https://digital.sciencehistory.org/works/pty356d>>. Acesso em 4 mar. 2024.

SOLEYMAN, Sean. **Solid state Tesla coils and their uses**. Relatório técnico. University of California, Berkeley, 2012. Disponível em: <https://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2012/>. Acesso em: 4 mar. 2024.

TESLA, Nikola. Experiments with Alternate Currents of Very High Frequency and their Application to Methods of Artificial Illumination. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, v. 8, n. 1, pp. 266-319, mai. 1891a. doi: 10.1109/T-AIEE.1891.5570149.

TESLA, Nikola. **System of electric lighting**. Depositante: Nikola Tesla. Procuradores: Duncan, Curts & Page. US n. 454622. Depósito: 25 abr. 1891. Concessão: 23 jun. 1891b.

TESLA, Nikola. **System of transmission of electrical energy**. Depositante: Nikola Tesla. Procuradores: Duncan, Curts & Page. US n° 645576. Depósito: 2 set. 1897. Concessão: 20 mar. 1900.

TESLA, Nikola. The Future of the Wireless Art. In: **MASSIE, Walter W. e UNDERHILL, Charles R. Wireless telegraphy and telephony**. New York: D. Van Nostrand, 1908. p. 67-71.

TESLA MEMORIAL SOCIETY OF NEW YORK. **Tesla's Achievements and Recognitions (Part 3)**. Disponível em: <[https://www.teslasociety.com/tesla\\_achievements3.htm](https://www.teslasociety.com/tesla_achievements3.htm)>. Acesso em: 21 jun. 2024.

TESLA SCIENCE CENTER AT WARDENCLYFFE. **Tower dismantled**. Disponível em: <<https://teslasciencecenter.org/pivotalmoments/tower-dismantled>>. Acesso em: 4 mar. 2024.

TEXAS INSTRUMENTS. **Waveform audit: is your inductor saturated?** Disponível em: <<https://www.ti.com/document-viewer/lit/html/SSZTAV7>>. Acesso em: 6 mar. 2024.

VILLAÇA, Marco. Ressonância uma revisão contextualizada - primeira parte. **Revista Ilha Digital**, Florianópolis, v. 8, p. 5–25, 2023. Disponível em: <<https://ilhadigital.florianopolis.ifsc.edu.br/index.php/ilhadigital/article/view/172>>. Acesso em: 4 mar. 2024.

VISHAY INTERTECHNOLOGY. **Frequency response of thin film chip resistors**. Disponível em: <<https://www.vishay.com/docs/49427/vse-tn00.pdf>>. Acesso em: 6 mar. 2024.

WÜRTH ELEKTRONIK. **Folha de dados do componente 7447221103**. Disponível em: <[https://www.w-online.com/en/components/products/WE-TI\\_2](https://www.w-online.com/en/components/products/WE-TI_2)>. Acesso em: 31 out. 2023.