



SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR MÉTODOS DIRETOS: CONTEXTO HISTÓRICO E APRESENTAÇÃO DE UM PACOTE SCILAB® – PRIMEIRA PARTE

Marco Valério Miorim Villaça¹

Resumo: Um sistema de equações lineares ou sistema linear é uma coleção finita de equações lineares de mesmas incógnitas. Dois tipos de métodos numéricos são usados para resolver sistemas de equações lineares: métodos diretos, onde a solução é obtida com a realização de operações algébricas nas equações; métodos iterativos, onde uma solução inicial aproximada é assumida e então utilizada em um processo iterativo. A eliminação de Gauss é o método direto mais conhecido para resolver equações lineares. Muitos autores, incluindo o próprio Gauss, contribuíram para moldar a eliminação de Gauss, a qual já era conhecida há mais de 2.000 anos na China. O mérito de Gauss foi introduzir uma notação que auxilia no cálculo manual de sistemas lineares, que se espalhou rapidamente, sendo adotada por geodestas no campo da cartografia e para resolver problemas usando mínimos quadrados. Após uma breve contextualização histórica, será apresentada a elaboração de um *script* Scilab® didaticamente organizado para solução de sistemas lineares pelo método da eliminação de Gauss, contendo funções que são compartilhadas pelos métodos disponíveis mais conhecidos, as fatorações LU e de Cholesky, abordadas na segunda parte deste artigo.

Palavras-chave: História da tecnologia. Solução de sistemas lineares. Métodos diretos. Cálculo numérico.

Abstract: A system of linear equations or linear system is a finite collection of linear equations with the same unknowns. Two types of numerical methods are used to solve systems of linear equations: direct methods, where the solution is obtained by performing algebraic operations on the equations; iterative methods, where an initial approximate solution is assumed and then used in an iterative process. Gaussian elimination is the best-known direct method for solving linear equations. Many authors, including Gauss himself, contributed to shaping Gaussian elimination, which had been known for more than 2,000 years in China. Gauss's merit was to introduce a notation that helps in the manual calculation of linear systems, which spread quickly, being adopted by geodesists in the field of cartography and to solve problems using least squares. After a brief historical contextualization, the elaboration of a didactically organized Scilab® script for solving linear systems using the Gaussian elimination method will be presented, containing functions that are shared by the best-known available methods, the LU and Cholesky factorizations, covered in the second part of this paper.

Keywords: History of technology. Linear systems solution. Direct methods. Numerical methods.

¹ Professor do Departamento Acadêmico de Eletrônica (DAELN), IFSC/Florianópolis <mvillaca@ifsc.edu.br>.

1 INTRODUÇÃO

Uma equação linear em incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ e b são constantes reais ou complexas. As constantes a_i são chamadas de coeficientes de x_i e b é chamado de termo constante da equação.

Um sistema de equações lineares ou sistema linear é uma coleção finita de equações lineares de mesmas incógnitas. Um sistema linear de n equações e n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ pode ser escrito como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2)$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Uma solução do sistema linear $[A]\{x\} = \{b\}$ é um vetor coluna de números $\{s\}$ tal que todas as equações do sistema são satisfeitas quando $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$. Ou seja, $\{s\}$ satisfaz $[A]\{x\} = \{b\}$. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado o conjunto solução do sistema.

Dois tipos de métodos numéricos são usados para resolver sistemas de equações lineares: nos métodos chamados de diretos, a solução é obtida com a realização de operações algébricas nas equações; nos métodos iterativos, uma solução inicial aproximada é assumida e, então, utilizada em um processo iterativo. O método direto mais conhecido para resolver equações lineares é a eliminação de Gauss, que será descrito em detalhes na seção 3. Resumidamente, o método consiste em manipular o sistema através de determinadas operações elementares, transformando a matriz aumentada do sistema, onde o vetor $\{b\}$ é colocado na última coluna da matriz $[A]$, em uma matriz triangular superior. Obtida a matriz triangular, basta aplicar substituições regressivas sucessivas para chegar à solução pretendida.

2 A HISTÓRIA DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

2.1 Métodos de eliminação na antiguidade

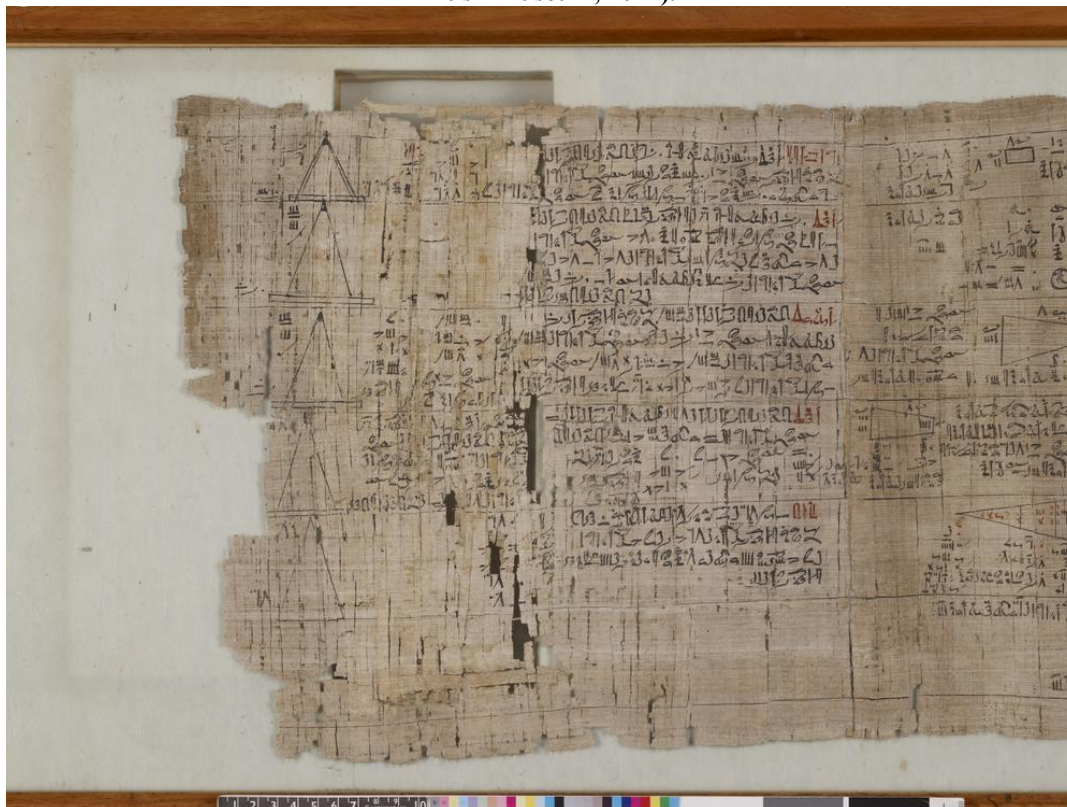
Fontes atuais de informação situam as origens dos métodos para a solução de sistemas lineares em uma variedade de textos antigos de diferentes lugares e épocas: China, Grécia, Roma, Índia, países árabes e renascença europeia. Tábuas cuneiformes do período da Antiga Babilônia, 2.000 a 1.600 a.C., contêm o que se acredita estar entre os primeiros problemas que podem ser interpretados como sistemas de equações lineares. Sobre essa possibilidade Høyrup (2010, a tradução é nossa) argumenta:

“Até recentemente, a ‘álgebra’ da Antiga Babilônia (majoritariamente identificada simplesmente como ‘Babilônica’) ou se parecia muito com a recente álgebra de equações nas apresentações da história da matemática, ou era caracterizada como ‘empírica’, uma coleção de regras encontradas por tentativa e erro ou outros métodos (não identificados) não baseados em raciocínio. [...] Análise mais precisa dos textos matemáticos da Antiga Babilônia – principalmente os chamados textos algébricos, os únicos suficientemente extensos para permitir tal análise – mostra que ambas as visões tradicionais estão erradas. As prescrições acabam sendo nem representações de cálculos algébricos como os conhecemos, nem regras (ou algoritmos) estúpidas a serem seguidas cegamente; eles descrevem um tipo particular de manipulação geométrica, que, como a álgebra de equações moderna, é de caráter analítico e que mostra a correção de seus procedimentos sem ser explicitamente demonstrativa. [...] As ‘equações lineares com várias incógnitas’ são problemas verbais [...] cuja tradução em equações algébricas pressupõe escolhas e, portanto, não é inequívoca. [...] As prescrições babilônicas descrevem [em palavras] o que é feito na representação geométrica, assim como podemos descrever em palavras o que estamos fazendo com a equação. [...] Afirmar que era uma álgebra simplesmente porque seus procedimentos podem ser descritos em equações modernas, ou declarar que não era, porque ela própria não escreveu tais equações, é talvez um pouco superficial.”

Uma das principais fontes para a matemática egípcia é o papiro “*Rhind*” (Figura 1), que data de cerca de 1550 a.C. O problema 40 no papiro é algumas vezes mencionado como um dos primeiros exemplos de equações lineares simultâneas (Anton e Rorres, 2014, p.234). Ele foi assim formulado: “Divida 100 pães entre cinco homens de tal maneira que a soma das três maiores partes seja sete vezes à soma das duas menores. Qual a diferença entre as suas partes?” Gillings (1972, p.172, a tradução é nossa). Gillings, entretanto, argumenta que a solução é baseada no conhecimento de progressões aritméticas:

“Em sua solução, o escriba imediatamente assumiu uma diferença comum de $5\frac{1}{2}$, porque ele sabia que a P.A. $\{23, 17\frac{1}{2}, 12, 6\frac{1}{2}, 1\}$ preenche exatamente as condições do problema, exceto pelos 100 pães. Então ele somou os 5 termos dando 60, que, observou ele, se tornará 100 se multiplicado por $1\frac{2}{3}$. Portanto, ele disse, ‘multiplique cada um dos cinco termos por $1\frac{2}{3}$ ’, dando $\{38\frac{1}{3}, 29\frac{1}{6}, 20, 10\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}\}^1$, a qual, como verificação, ele mostrou somar 100. Esta é a sua resposta.” (Gillings, 1972, p. 172, a tradução é nossa).

Figura 1 – Lado esquerdo do “Rhind Mathematical Papyrus” (The Trustees of the British Museum, 2024).



Por volta de 200 a.C., portanto dois mil anos antes de Gauss (1777-1855), os chineses estavam usando métodos de eliminação para resolver sistemas de equações lineares (Katz, 1995, p.189). No capítulo 8 do livro “*Jiuzhang suanshu*”², o tratamento mais notável de equações lineares simultâneas conhecido da antiguidade, são apresentados problemas de rendimentos agrícolas, venda de animais e uma variedade de outros problemas, todos levando a sistemas de equações lineares, que são resolvidos pelo método de eliminação. Os problemas levam a sistemas que variam de duas equações e duas incógnitas a seis equações e seis incógnitas, sendo que um deles leva a um sistema indeterminado de cinco equações em seis incógnitas. Abaixo, apresenta-se o primeiro problema desse capítulo:

“Existem três classes de milho, das quais três pacotes da primeira classe, dois da segunda e um da terceira fazem 39 medidas. Dois dos primeiros, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E uma das primeiras, duas da segunda e três da terceira fazem 26 medidas. Quantas medidas de grãos estão contidas em um pacote de cada classe?” (Katz, 1995, p.191).

Cada classe de milho, ou grão, é empacotada em tamanhos diferentes e o problema é decidir em que tamanhos as diferentes classes são agrupadas. Na notação algébrica moderna, x_1 denotaria o número de

¹ Conforme explica Gillings (1972, p. 21), todas as frações hieroglíficas e hieráticas são frações unitárias. A fração $3/4$, da forma p/q , era escrita pelos egípcios como $1/2 + 1/4$. A exceção ao uso do numerador unitário era a fração $2/3$.

² Forma transliterada do chinês 九章算術. Traduzido para Nove capítulos sobre a arte da matemática, “*Jiuzhang suanshu*” é um livro de autoria anônima e coletiva. O comentário escrito em 263 d.C. pelo matemático Liu Hui (劉徽) foi o texto mais influente da história da matemática chinesa.

medidas de grão na primeira classe, x_2 o número na segunda classe e x_3 o número na terceira. Tem-se, então três equações em três incógnitas, ou seja,

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 34$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26$$

Os chineses antigos, porém, não usavam variáveis. Usando varetas de contagem feitas de bambu ou marfim para representar os números (Figura 2), os chineses configuravam fisicamente o problema em um tabuleiro de contagem na forma de uma matriz, organizando os coeficientes de cada equação em uma coluna e preenchendo as colunas da direita para a esquerda (Brezinski; Meurant; Zaglia, p. 35-36). A Figura 3(a) representa a configuração inicial do problema dos grãos. Iniciando a solução do problema, multiplica-se a coluna do meio por três e a subtrai duas vezes da coluna da direita e, então, multiplica-se a coluna da esquerda por três e a subtrai da coluna da direita, resultando na configuração da Figura 3(b). Em seguida, a coluna mais à esquerda é multiplicada por cinco e subtraída quatro vezes da coluna do meio, resultando na configuração da Figura 3(c), a partir da qual a solução pode ser encontrada para a terceira classe de grãos, depois para a segunda e a primeira por substituição reversa. As quantidades que não desaparecem na coluna da esquerda, a primeira é o divisor e a seguinte o dividendo da terceira classe, em algarismos arábicos, respectivamente 99 e 36. Assim, o número de grãos da terceira classe é $99/36$, razão que pode ser simplificada para $11/4$, conforme mostrado na Figura 3(d). Para encontrar a quantidade de grãos segunda classe, multiplica-se a coluna do meio por 4 (o divisor da terceira classe) e, então, a subtrai da coluna da esquerda, obtendo em arábico $[0\ 20\ 0\ 85]^T$. Assim, o número de grãos da segunda classe é $85/20$ que é simplificado para $17/4$, resultando na configuração da Figura 3(e). Para encontrar a quantidade da primeira classe, multiplica-se a coluna da direita por 4 e subtrai o resultado da coluna da esquerda, obtendo em arábico $[12\ 8\ 0\ 145]^T$. Resultado este que é subtraído duas vezes da coluna do meio, obtendo, após simplificação, a configuração final da Figura 3(f). Dividindo os dividendos das três classe pelo divisor 4, obtém-se as respectivas quantidades, ou seja, $x_1 = 9\frac{1}{4}$, $x_2 = 4\frac{1}{4}$ e $x_3 = 2\frac{3}{4}$.

Figura 2 – Havia dois conjuntos de numerais na China antiga (Brezinski; Meurant; Zaglia, 2002, p. 35). As unidades, centenas e dezenas de milhares são representadas na forma vertical, enquanto as dezenas e os milhares na forma horizontal. Não havia necessidade de um zero na tábua de contagem, um quadrado era simplesmente deixado em branco.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unidades, centenas e dezenas de milhares	—	=	≡	≡≡	≡≡≡	⊥	⊥	⊥	⊥
Dezenas, milhares e centenas de milhares						⊥	⊥	⊥	⊥

Figura 3 – Passos da solução do problema dos grãos usando um tabuleiro de contagem chinês tradicional. Adaptada de (Schwartz, 2008, p. 11).

<table border="1"> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>=⊥</td><td>≡ </td><td>≡⊥</td></tr> </table> (a)										=⊥	≡	≡⊥	<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>⊥</td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>≡⊥</td><td>= </td><td>≡⊥</td></tr> </table> (b)							⊥			≡⊥	=	≡⊥	<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td> </td></tr> <tr><td></td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>≡⊥</td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>⊥⊥</td><td>= </td><td>≡⊥</td></tr> </table> (c)							≡⊥			⊥⊥	=	≡⊥
=⊥	≡	≡⊥																																				
⊥																																						
≡⊥	=	≡⊥																																				
≡⊥																																						
⊥⊥	=	≡⊥																																				
<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td> </td></tr> <tr><td></td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>— </td><td>= </td><td>≡⊥</td></tr> </table> (d)										—	=	≡⊥	<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td> </td></tr> <tr><td></td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td></td><td> </td></tr> <tr><td>— </td><td>—⊥</td><td>≡⊥</td></tr> </table> (e)										—	—⊥	≡⊥	<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td> </td></tr> <tr><td></td><td> </td><td></td></tr> <tr><td> </td><td></td><td></td></tr> <tr><td>— </td><td>—⊥</td><td>≡⊥</td></tr> </table> (f)										—	—⊥	≡⊥
—	=	≡⊥																																				
—	—⊥	≡⊥																																				
—	—⊥	≡⊥																																				

Segundo Grcar (2011b, p.783), nas obras “*Αριθμητική*” (Aritmética) do matemático grego Διόφαντος (Diofanto - II a.C) e “*Āryabhaṭīya*” do matemático hindu Āryabhata (século 5 d.C.) foram resolvidas o que pode ser interpretado como equações lineares simultâneas sem, contudo, a generalidade de “*Jiuzhang suanshu*”.

2.2 A eliminação gaussiana na Europa renascentista

Com exceção do método chinês, pouco progresso no desenvolvimento de uma teoria abrangente de sistemas de equações lineares e suas soluções foram feitos da antiguidade até os últimos anos do século XVII. Durante este período equações lineares simultâneas raramente eram consideradas e, quando eram, a eliminação gaussiana estava ausente, exceto no “*Jiuzhang suanshu*” e, segundo Kloyda (1938 *apud* Grcar, 2011a, p. 169), que examinou 107 textos de álgebra impressos entre 1550 e 1660, apenas nas obras dos matemáticos franceses Jaques Peletier du Mans (“*L'algèbre*”, 1554), Johannes Buteo (“*Logistica*”, 1560) e Guillaume Gosselini (“*De arte magna*”, 1577) e do matemático suíço Heinrich Rahn (“*Teutsche Algebra*”, 1659).

Antes do período examinado por Kloyda, para resolver um sistema de duas equações lineares, o matemático italiano Gerolamo Cardano (1501-1576) forneceu uma regra chamada de *regula modi* (regra prática) em sua obra de 1545, “*Artis magnæ, sive de regulis algebraicis, liber unus*” (Um único livro sobre as grandes artes ou sobre regras algébricas). Sua regra, corresponde, em essência, à regra de Cramer para sistemas 2×2 . Cardano (1545, p. 52, anverso) propõe o seguinte problema: “Sete pacotes de seda verde e três de preto custam 72 denários³ e, pelo mesmo preço, dois de verde e quatro de preto custam 52 denários. Nós desejamos conhecer seus preços. Suponha que x é o preço de um pacote da seda verde.”. Em termos modernos, tem-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 &= 72 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 52 \end{aligned} \quad (4)$$

Para resolver o sistema da Equação 4, Cardano estabelece a seguinte regra:

“[...] Divida 4 por 3, ou seja, o número de pacotes do mesmo tipo de seda em duas posições, resulta $1\frac{1}{3}$. Multiplique isso por 7 e 72, resultando em $9\frac{1}{3}$ e 96, dos quais subtraia os números dados para a segunda posição, que são 2 e 52, respectivamente, deixando $7\frac{1}{3}$ e 44. Divida o número de denários, 44, por $7\frac{1}{3}$, o número de pacotes, resulta em 6, o preço de um pacote de seda verde. E, assim, estabelecerá uma regra mais breve, a partir de uma operação tão longa, de onde merecidamente esse regra prática pode ser chamada de mãe das regras.” (Cardano 1545, p. 52 verso, tradução é nossa).

Esta regra, pode ser matematicamente escrita para a Equação 4 como:

$$x_1 = \frac{72 \cdot 4/3 - 52}{7 \cdot 4/3 - 2}$$

ou, usando coeficientes em vez de números:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

que é cálculo de x_1 na forma da regra de Cramer⁴.

Peletier (1554, p. 107-112) resolve um problema proposto por Cardano (1545, p. 21 verso – 22 anverso) onde “três homens tinham algum dinheiro. O primeiro homem com a metade dos outros teria 32 áureos⁵, o segundo com um terço dos outros, 28 áureos; e o terceiro com um quarto dos demais, 31 áureos. Quanto tinha cada um?” (a tradução é nossa). Após revisar a solução de Cardano ponto a ponto, ele apresenta uma solução mais adequada ao seu propósito, ou seja, puramente simbólica. Peletier forma o sistema de equações da forma descrita a seguir. “O primeiro homem com a metade dos outros teria 32 áureos”: $R + (A + B)/2 = 32$, ou seja, $2R + A + B = 64$. “O segundo com um terço dos outros, 28 áureos”: $A + (R + B)/3 = 28$, ou seja, $R + 3A + B = 84$. “E o terceiro com um quarto dos demais, 31 áureos”: $B + (R + A)/4 = 31$, ou seja, $R + A +$

³ O denário (*denarius*, em latim, plural *denarii*), era uma pequena moeda de prata em circulação durante a maior parte do Império Romano.

⁴ Na sua obra “*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*” de 1750, Gabriel Cramer publicou a regra que leva seu nome para a solução de um sistema $n \times n$, sem, contudo, oferecer uma prova (Brezinski; Meurant; Zaglia, p. 104-105).

⁵ O áureo (*aureus*, em latim, plural *aurei*) era uma antiga moeda romana de ouro, equivalente a 25 denários.

$4B = 124$. A partir dessas três equações iniciais, Peletier obtém sete, quando precisaria obter apenas mais três equações, e, utilizando as equações x , v e i da Tabela 1, obtém a solução do problema por substituição regressiva.

Tabela 1 – Sistema de equações e sua solução em Peletier (1554, p. 111-112).

Combinação	Equação	Numeração
	$2R + A + B = 64$	i
	$R + 3A + B = 84$	ii
	$R + A + 4B = 124$	iii
ii + iii	$2R + 4A + 5B = 208$	iv
iv – i	$3A + 4B = 144$	v
i + ii	$3R + 4A + 2B = 148$	vi
i + iii	$3R + 2A + 5B = 188$	vii
vi + vii	$6R + 6A + 7B = 336$	viii
$6 \times$ iii	$6R + 6A + 24B = 744$	ix
ix – viii	$17B = 408$	x

Buteo em seu trabalho “*Logistica quæ & arithmetica vulgò dicitur in libros quinque digesta*” (Logística, comumente chamada de aritmética, dividida em cinco livros), na seção intitulada “*De regula quantitatis*” (Da regra de quantidade), resolveu sistemas lineares de três e quatro equações por eliminação gaussiana usando uma combinação linear de duas equações como em “*Jiuzhang suanshu*”. Buteo (1560, p. 190, tradução nossa) propõe encontrar “três números, o primeiro dos quais com um terço do resto dá 14. O segundo com um quarto dos outros, 8. O terceiro com um quinto dos outros, 8”. A solução do problema, obtida por substituição regressiva a partir das equações vi , v e iii , é apresentada na Figura 4. Grcar (2011a, p. 169) observa que os Nove capítulos e a eliminação canônica usariam as equação i no lugar da equação iii .

Figura 4 – Sistema de equações e solução por eliminação de Buteo, onde ele usa ‘.’ ou ‘;’ para simbolizar ‘+’ e ‘[’ para ‘=’. Adaptado de Buteo (1560, p. 190-191).

i	$3A. 1B. 1C [42] 1^a$	
ii	$1A. 4B. 1C [32] 2^a$	
iii	$1A. 1B. 5C [40] 3^a$	
	$3A. 12B. 3C [96]$	$3 \times ii$
–	$3A. 1B. 1C [42]$	i
iv	$11B. 2C [54]$	
	$3A. 3B. 15C [120]$	$3 \times iii$
–	$3A. 1B. 1C [42]$	i
v	$2B. 14C [78]$	
	$22B. 154C [858]$	$11 \times v$
–	$22B. 4C [108]$	$2 \times iv$
vi	$150C [750]$	

Gosselini (1577, p. 82 verso – 84 anverso) resolve o mesmo problema de quatro incógnitas e quatro equações proposto por Buteo (1560, p. 193, tradução nossa): “Vamos encontrar quatro números, o primeiro dos quais com a metade do resto dá 17; o segundo com um terço dos outros, 12; o terceiro com um quarto dos outros, 13; o quarto com um sexto dos outros também 13.”, cujo a solução inicia com a construção da sistema de equações da Figura 5(a). Para eliminar a variável A do sistema de equações da Figura 5(a), Gosselini soma a terceira e a quarta equações, a segunda com a quarta e a segunda com a terceira. Os resultados das adições são subtraídos da primeira equação, resultando no resultado indicado na Figura 5(b). Para eliminar a variável B do sistema da Figura 5(b), ele inicia multiplicando por 3 a segunda equação. O resultado obtido é, então, subtraído primeiro da terceira e depois da quarta equação, resultando em um novo sistema, apresentado na

Figura 5(c). Finalmente, para eliminar a variável C do sistema da Figura 5(c), Gosselini multiplica a quarta equação por 11, a terceira equação por 8 e subtrai os resultados, obtendo o sistema de equações mostrado na Figura 5(d), sistema que pode ser resolvido por substituição regressiva.

Figura 5 – Processo de eliminação progressiva em Gosselini (1577, p 82-84).

$$\begin{cases} 2A + B + C + D = 34 \\ A + 3B + C + D = 36 \\ A + B + 4C + D = 52 \\ A + B + C + 6D = 78 \end{cases}$$

(a)

$$\begin{cases} 2A + B + C + D = 34 \\ B + 4C + 6D = 96 \\ 3B + C + 6D = 80 \\ 3B + 4C + D = 54 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2A + B + C + D = 34 \\ B + 4C + 6D = 96 \\ 11C + 12D = 208 \\ 8C + 17D = 234 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} 2A + B + C + D = 34 \\ B + 4C + 6D = 96 \\ 11C + 12D = 208 \\ 91D = 910 \end{cases}$$

(d)

Rahn (1659, p. 85-86, tradução nossa), o último autor citado por Kloyda, resolveu o seguinte problema de três incógnitas: “Três partilham uma quantia: o primeiro dá aos outros dois tanto quanto eles já têm; o outro dá aos restantes tanto quanto eles têm; o terceiro faz o mesmo. De acordo com o seguinte, cada um fica com 8. Quanto cada um tinha no começo?”. Rahn inicia a solução elaborando a Tabela 2⁶, dela extraindo o sistema de equações, que é resolvido conforme apresentado na Figura 6.

Tabela 2 – Construção do sistema de equações para a solução do problema sugerido por Rahn (1659, p. 85).

	Primeiro	Segundo	Terceiro
1	a	b	c
2	$a - b - c$	$2b$	$2c$
3	$2a - 2b - 2c$	$-a + 3b - c$	$4c$
4	$4a - 4b - 4c$	$-2a + 6b - 2c$	$-a - b + 7c$

No capítulo IV do primeiro livro do “*Traité d’Algèbre, ou Principes Généraux pour Résoudre les Questions de Mathématique*” de 1690, o matemático francês Michel Rolle apresenta uma descrição do algoritmo da eliminação de Gauss, o qual ele chamava de método da substituição (Rolle, p. 46-47). Ele descreve as diversas etapas do método em palavras, onde ele usa o termo libertar (*Dégager*) no lugar de eliminar: “Tomaremos uma das igualdades que quisermos. Nesta igualdade pegaremos, também, uma de suas incógnitas a vontade e a libertaremos.” (Rolle, 1690, p. 46, tradução nossa). Então ele propõe organizar os cálculos em colunas, onde a da esquerda, a coluna de direção (*colonne de direction*), corresponde à etapa conhecida atualmente como eliminação progressiva e a da direita, a coluna de retorno (*colonne de retour*), corresponde à etapa da substituição regressiva. Após a descrição do método, ele o aplica na solução de um sistema de equações lineares de ordem 4. Na Figura 7 ele apresenta “a ordem e a disposição que podem ser dadas ao cálculo” (Rolle, 1690, p. 46, tradução nossa). A coluna de direção inicia com o sistema original e, obtém-se, sucessivamente, sistemas menores usando a primeira equação de cada um para remover uma incógnita das outras equações do sistema. A coluna de retorno inicia com um sistema composto pela primeira linha de cada sistema da coluna de direção, sendo que a primeira equação é o resultado de uma das incógnitas. Então, obtém-se, sucessivamente, sistemas menores substituindo-se o resultado da primeira equação de cada sistema nas suas outras equações para conhecer uma nova incógnita.

⁶ “O primeiro dá aos outros tanto quanto eles já têm”:

- ele fica com $a - (b + c)$,
- o segundo com $2b$ e
- o terceiro com $2c$.

“O outro dá aos restantes tanto quanto eles têm”:

- ele fica com $2b - (a - b - c) - 2c = -a + 3b - c$,
- o primeiro com $2a - 2b - 2c$ e
- o terceiro com $4c$.

“O terceiro faz o mesmo”:

- ele fica com $4c - (2a - 2b - 2c) - (-a + 3b - c) = -a - b + 7c$
- o primeiro fica com $4a - 4b - 4c$ e
- o segundo com $-2a + 6b - 2c$.

Figura 6 – Sistema de equações e solução por eliminação gaussiana de Rahn (1659, p. 86).

		86	Algebraische
4,	5		$4a - 4b - 4c = 8$
4,	6		$-2a + 6b - 2c = 8$
4,	7		$-a - b + 7c = 8$
$5 \div 4$	8		$+a - b - c = 2$
$6 \div 2$	9		$-a + 3b - c = 4$
$7 + 8$	10		$-2b + 6c = 10$
$8 + 9$	11		$+2b - 2c = 6$
$10 + 11$	12		$4c = 16$
$12 \div 4$	13		$C = 4$
$11 * 3$	14		$+6b - 6c = 18$
$10 + 14$	15		$4b = 28$
$15 \div 16$	16		$B = 7$
$13 + 16$	17		$+B + c = 11$
$8 + 17$	18	A	$= 13$
		Hat hiemit der erste 13, der andere 7, und der dritte 4.	

Figura 7 – Eliminação gaussiana realizada por Rolle (1690, p. 47), onde ele usa ‘ $\succ$ ’ para simbolizar ‘=’.

Colonne de direction.	Colonne du retour.
Premiere Classe.	Premiere Classe.
$x + y + z \succ 6$	$y \succ 2.$
$x + y + v \succ 7$	$z \succ 1 + y.$
$x + z + v \succ 8$	$v \succ 1 + z$
$y + z + v \succ 9$	$x \succ 6 - y - z$
Seconde Classe.	Seconde Classe.
$v - z \succ 1$	$z \succ 3$
$v - y \succ 2$	$v \succ 1 + z$
$y + z + v \succ 9$	$x \succ 4 - z$
Troisieme Classe	Troisieme Classe
$z - y \succ 1$	$v \succ 4$
$y + 2z \succ 8$	$x \succ 1$
Quatrieme Classe	Quatrieme Classe
$3y \succ 6.$	$x \succ 1.$
Colonne finale.	
$y \succ 2$	
$z \succ 3$	
$v \succ 4$	
$x \succ 1$	

Newton, em notas de aula sobre álgebra escritas em latim e que preferia não ter visto publicadas, descreveu um processo de resolução de equações não lineares simultâneas, conforme o contexto e os exemplos que o acompanham. Uma última versão desses manuscritos foi entregue em 1684 para a Universidade de

Cambridge e publicada, com a recusa da autoria por parte de Newton, apenas em 1707 por William Whiston que ocupou a cátedra de Newton em Cambridge em 1702. A primeira edição em inglês, com tradução de Joseph Raphson, foi publicada em 1720 sob o título “*Universal Arithmetick: or a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution*”, ainda sem o nome de Newton como autor. Na sessão desse livro intitulada “*Of the transformation of two or more æquations into one, in order to exterminate the unknown quantities*”, Newton propõe um método de eliminação para sistemas de equações em que:

“[...] essas equações (duas a duas, se houver mais de duas) devem ser conectadas de modo que uma das quantidades desconhecidas possa desaparecer em cada uma das operações, e assim produzir uma nova equação. [...] E você deve saber que para cada equação uma quantidade desconhecida pode ser retirada e, conseqüentemente, quando houver muitas equações e quantidades desconhecidas, todas podem ser reduzidas a uma, na qual haverá apenas uma quantidade desconhecida.” (Newton, 1720, p. 60-61, tradução é nossa).

Newton, então, oferece vários métodos para eliminar, ou exterminar em suas palavras, incluindo igualdade e substituição:

“Quando a quantidade a ser exterminada for de apenas uma Dimensão em ambas as equações, ambos os seus Valores devem ser buscados pelas Regras já entregues, e uma feita igual a outro. Então, colocando que $a + x = b + y$ e $2x + y = 3b$, que y pode ser exterminada, a primeira equação dará $ax - b = y$, e a segunda dará $3b - 2x = y$. Logo, $a + x - b = 3b - 2x$. Ou na devida ordem $x = \frac{4b-a}{3}$. [...] Quando, pelo menos, em uma das equações a Quantidade a ser exterminada for apenas de uma Dimensão, seu Valor deverá ser buscado nessa equação, e então substituído em seu lugar na outra equação. Então, tendo proposto $xyy = b^3$ e $xx + yy = by - ax$, para exterminar x , a primeira dará $x = \frac{b^3}{yy}$; pelo que eu substituo na segunda $\frac{b^3}{yy}$ no lugar de x , e lá resulta $\frac{b^6}{y^4} + yy = by - \frac{ab^3}{yy}$, e por redução $y^6 - by^5 + ab^3yy + b^6 = 0$.” (Newton, 1720, p. 61-62, tradução nossa).

Segundo Grcar (2011a, p. 171), Newton parece ter influenciado mais do que Rolle os autores franceses influentes de livros didáticos perto da virada do século XVIII, como Étienne Bézout, Sylvestre Lacroix e Louis Pierre Marie Bourdon. Esta influência pode ser percebida na escolha das palavras, como em *extermino* do texto em latim traduzida para *exterminate* na edição inglesa e nos textos que dela derivaram. Um exemplo proeminente dessa influência é Tratado de Álgebra de Thomas Simpson de 1755, onde ele ampliou as lições de Newton para ‘o extermínio de quantidades desconhecidas’ com a regra de adição e/ou subtração, usada em “*Jiuzhang suanshu*” que formava uma combinação linear de duas equações:

“Multipliquem-se ou dividam-se as equações dadas por tais números ou quantidades, sejam conhecidas ou desconhecidas, de modo que o termo que envolve a maior potência da quantidade desconhecida a ser exterminada possa ser o mesmo em cada equação; e então, adicionando ou subtraindo as equações, conforme a ocasião exigir, esse termo desaparecerá e surgirá uma nova equação, na qual o número de dimensões (se não o número de quantidades desconhecidas) será diminuído.” (Simpson, 1755, p. 64, tradução nossa).

No seu livro intitulado “*Vollständige Anleitung zur Algebra*”, Leonhard Euler afirma, no capítulo dedicado à solução de duas equações de primeiro grau, que o método da substituição é a “*maneira mais natural*” de proceder (Euler 1771, p. 27, tradução nossa). Euler inicia mostrando, através de exemplos, como resolver um sistema com duas equações e duas incógnitas igualando as duas equações em x e computando y , e mais adiante, ele explica como resolver um sistema linear de três equações. Generalizando, Euler escreve: “Se houver mais de três quantidades desconhecidas e o mesmo número de equações, a solução poderá ser realizada de maneira semelhante, o que normalmente levaria a cálculos incômodos.” (Euler, 1771, p. 32, tradução nossa).

“*L'Encyclopédie méthodique par ordre de matières par une Société de gens de Lettres, de Savans et d'Artistes*”, publicada em 1782 a 1832 por Charles-Joseph Panckoucke, está dividida em dicionários científicos. Com mais de 200 volumes sobre cerca de quarenta assuntos, contando com mais de 400 autores, consiste numa nova e completa edição da “*The Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*” sob a supervisão do filósofo francês Denis Diderot e do matemático Jean Le Rond d'Alembert (The ARTFL Project, 2024). No primeiro dos três volumes dedicados a matemática, há um verbete “*Élimination*” escrito pelo abade Charles Bossut, que explica:

“Chamamos assim uma operação pela qual, dado um número n de equações que contêm um número n de incógnitas, encontramos uma equação que contém apenas uma incógnita: de modo que se pudermos resolver esta equação, saberemos a incógnita que ela contém; e voltando, conheceremos as outras incógnitas. A partir daí, eliminar uma quantidade significa a mesma coisa que remover essa quantidade, fazê-la desaparecer.” (Bossut, 1784, p.625, tradução nossa).

2.3 A eliminação gaussiana no século XIX

Não obstante o verbete publicado por Bossut, foi Sylvestre Lacroix que iniciou a disseminação do termo “eliminação” para caracterizar a eliminação de Gauss. Nesse sentido Lacroix (1804, p. 114, tradução nossa) escreveu:

“[...] se essas incógnitas forem apenas de primeiro grau, podemos, como fizemos nos números anteriores, pegar em uma das equações o valor de uma das incógnitas, como se todo o resto fosse conhecido, e substituir esse valor em todas as outras equações, que depois disso conterão apenas as outras incógnitas. Esta operação pela qual removemos uma das incógnitas, é chamado de eliminação.”.

Em 1818 foi impressa nos Estados Unidos uma tradução de “*Elemens d’algèbre*” de Lacroix feita por John Farrar. Dezenas de livros didáticos americanos do século XIX repetiram “[isso] é chamado de eliminação” depois que a tradução de Farrar apareceu (Grcar, 2011a, p. 177, tradução nossa).

Conforme destacam Brezinski, Meurant e Zaglia (2002, p 56, tradução nossa), “até meados do século XVIII, apenas sistemas lineares muito pequenos com coeficientes inteiros foram resolvidos, seja como exercícios em livros ou como exemplos com problemas relacionados aos comerciantes”. Isso não foi um problema por algum tempo, porque grandes sistemas de equações lineares não surgiram em aplicações relevantes. Essa situação muda no início do século XIX com a aparição do método dos mínimos quadrados (*méthode des moindres quarrés*) em “*Nouvelle méthode pour la détermination des orbites des comètes*” de Adrien-Marie Legendre (1805) e em “*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solum cmbientium*” (Teoria do movimento dos corpos celestes orbitando o sol em seções cônicas) de Carl Friedrich Gauss (1809). O método dos mínimos quadrados, que surgiu de problemas em astronomia, geodésia e topografia, é um método para fazer inferências estatísticas para as incógnitas em sistemas de equações lineares com mais equações que incógnitas (sobredeterminados), minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados, para obter “tantas equações lineares quantas são as incógnitas a serem determinadas, das quais os valores destas últimas serão obtidos por eliminação comum” (Gauss, 1809, p.214, tradução nossa), ou, do latim, *eliminationem vulgarem*.

Gauss aplicou o método dos mínimos quadrados formulando seus cálculos em termos de formas quadráticas para encontrar a melhor solução de um sistema de equações lineares sobre determinado com onze equações e seis incógnitas:

“No volume I do *Gottingen Nachrichten*, Gauss apresentou a aplicação de seu método à correção dos elementos do planeta Pallas⁷. Dado que o ilustre matemático desenvolveu o algoritmo descrito mais brevemente na sua grande obra *Theoria Motus Corporum Coelestium* [...] neste exemplo, sentimos que deveríamos traduzir aqui esta parte das suas memórias. Como a primeira parte requer um amplo conhecimento da teoria do movimento planetário, não a reproduziremos e tomaremos como ponto de partida as doze equações que os seis elementos da órbita deveriam satisfazer. [...] Pela natureza das observações que forneceram a décima dessas equações, considera-se que inspira muito pouca confiança fazer uso dela, e as seis incógnitas serão determinadas apenas a partir das outras onze.” (Gauss e Bertrand, 1855, p. 134-135).

A Figura 8 apresenta as equações obtidas por Gauss, onde as correções dos elementos das órbitas são representadas por dL , $d\gamma$, $d\pi$, $d\phi$, $d\Omega$ e di . O sistema continha restrições conflitantes que surgiram devido a erros de medição.

⁷ Pallas, o terceiro maior corpo do cinturão de asteroides entre Marte e Júpiter, era considerado um planeta à época de Gauss.

Figura 8 – Sistema de equações usado por Gauss para determinar a excentricidade e inclinação da órbita de Pallas (Gauss, 1855, p. 135).

$$\begin{aligned}
 o &= -183'',93 + 0,79363 dL + 143,66 dI + 0,39493 d\pi \\
 &\quad + 0,95920 d\varphi - 0,18856 d\Omega + 0,17387 di; \\
 o &= -6'',81 - 0,02658 dL + 46,71 dI + 0,02658 d\pi \\
 &\quad - 0,20858 d\varphi + 0,15946 d\Omega + 1,25782 di; \\
 o &= -0'',06 + 0,58880 dL + 358,12 dI + 0,26208 d\pi \\
 &\quad - 0,85234 d\varphi + 0,14912 d\Omega + 0,17775 di; \\
 o &= -3'',09 + 0,01318 dL + 28,39 dI - 0,01318 d\pi \\
 &\quad - 0,07861 d\varphi + 0,91704 d\Omega + 0,54365 di; \\
 o &= -0'',02 + 1,73436 dL + 1846,17 dI - 0,54603 d\pi \\
 &\quad - 2,05662 d\varphi - 0,18833 d\Omega - 0,17445 di; \\
 o &= -8'',98 - 0,12606 dL - 227,42 dI + 0,12606 d\pi \\
 &\quad - 0,38939 d\varphi + 0,17176 d\Omega - 1,35441 di; \\
 o &= -2'',31 + 0,99584 dL + 1579,03 dI + 0,06456 d\pi \\
 &\quad + 1,99545 d\varphi - 0,06040 d\Omega - 0,33750 di; \\
 o &= +2'',47 - 0,08089 dL - 67,22 dI + 0,08089 d\pi \\
 &\quad - 0,09970 d\varphi - 0,46359 d\Omega + 1,22803 di; \\
 o &= +0'',01 + 0,65311 dL + 1329,09 dI + 0,38994 d\pi \\
 &\quad - 0,08439 d\varphi - 0,04305 d\Omega + 0,34268 di; \\
 o &= +38'',12 - 0,00218 dL + 38,47 dI + 0,00218 d\pi \\
 &\quad - 0,18710 d\varphi + 0,47301 d\Omega - 1,14371 di; \\
 o &= -317'',73 + 0,69957 dL + 1719,32 dI + 0,12913 d\pi \\
 &\quad - 1,38787 d\varphi + 0,17130 d\Omega - 0,08360 di; \\
 o &= +117'',97 - 0,01315 dL - 43,84 dI + 0,01315 d\pi \\
 &\quad + 0,02929 d\varphi + 1,02138 d\Omega - 0,27187 di.
 \end{aligned}$$

Como as onze equações não podem ser satisfeitas, procura-se minimizar a soma de seus quadrados. Assim, o sistema acima pode ser representado por

$$\begin{cases}
 n + ap + bq + cr + \dots = \omega \\
 n' + a'p + b'q + c'r + \dots = \omega' \\
 n'' + a''p + b''q + c''r + \dots = \omega'' \\
 \dots
 \end{cases}$$

onde $p, q, r, \dots$ são as incógnitas do modelo linear; $n, a, b, c, \dots$ são os coeficientes de ajuste de cada observação e são conhecidos; $\omega, \omega', \omega'', \dots$ são os erros ou discrepâncias cujo a soma dos quadrados

$$\Omega = \omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 + \dots$$

deve ser minimizada. As condições de primeira ordem para um mínimo são:

$$\begin{cases}
 \frac{\partial(\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 + \dots)}{\partial p} = 0 \\
 \frac{\partial(\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 + \dots)}{\partial q} = 0 \\
 \frac{\partial(\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 + \dots)}{\partial r} = 0 \\
 \dots
 \end{cases} \quad (5)$$

Resolvendo a primeira equação do sistema de equações mostrado na Equação 5, resulta:

$$\begin{aligned}
 &2a(n + ap + bq + cr + \dots) + 2a'(n' + a'p + b'q + c'r + \dots) \\
 &+ 2a''(n'' + a''p + b''q + c''r + \dots) + \dots = 0
 \end{aligned}$$

Agrupando os coeficientes em $n, p, q, r, \dots$, resulta:

$$(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)p + (ab + a'b' + a''b'' + \dots)q + (ac + a'c' + a''c'' + \dots)r + \dots = (an + a'n' + a''n'' + \dots)$$

ou, em uma notação escolhida por Gauss⁸ para representar os somatórios:

$$(an) + (aa)p + (ab)q + (ac)r + \dots = 0$$

Utilizando procedimento similar nas outras equações do sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} (an) + (aa)p + (ab)q + (ac)r + \dots = 0 \\ (bn) + (ab)p + (bb)q + (bc)r + \dots = 0 \\ (cn) + (ac)p + (bc)q + (cc)r + \dots = 0 \\ \dots \end{cases} \quad (6)$$

Optando-se por apresentar “a versão da eliminação de Gauss dos livros didáticos de astronomia e de geodésia do século XIX e início do século XX” (Aldrich, 1998, p. 62, tradução nossa) mais simples que a versão de Gauss⁹, inicia-se o processo de eliminação resolvendo a primeira equação para p :

$$p = -\frac{(ab)q}{(aa)} - \frac{(ac)r}{(aa)} - \dots - \frac{(an)}{(aa)} \quad (7)$$

E, então, substituindo o valor de p dado pela Equação 7 nas outras equações da Equação 6, resulta

$$\begin{aligned} \left((bn) - \frac{(ab)(an)}{(aa)} \right) + \left((bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)} \right) q + \left((bc) - \frac{(ab)(ac)}{(aa)} \right) r + \dots &= 0 \\ \left((cn) - \frac{(ac)(an)}{(aa)} \right) + \left((bc) - \frac{(ab)(ac)}{(aa)} \right) q + \left((cc) - \frac{(ac)^2}{(aa)} \right) r + \dots &= 0 \\ \dots & \end{aligned} \quad (8)$$

Gauss utiliza uma notação para o termo independente e os coeficientes das incógnitas, por exemplo o coeficiente de q é abreviado para $(bb, 1)$, indicando que a primeira eliminação foi concluída. Assim, o sistema da Equação 8 pode ser reescrito como

$$\begin{array}{ccccccccc} (an) & + & (aa)p & + & (ab)q & + & (ac)r & + & \dots & = & 0 \\ (bn, 1) & & & + & (bb, 1)q & + & (bc, 1)r & + & \dots & = & 0 \\ (cn, 1) & & & + & (bc, 1)q & + & (cc, 1)r & + & \dots & = & 0 \\ & & & & \dots & & & & & & \end{array} \quad (9)$$

Construindo combinações sucessivamente menores de parâmetros, obtém-se:

$$\begin{array}{ccccccccc} (an) & + & (aa)p & + & (ab)q & + & (ac)r & + & \dots & = & 0 \\ (bn, 1) & & & + & (bb, 1)q & + & (bc, 1)r & + & \dots & = & 0 \\ (cn, 2) & & & & & + & (cc, 2)r & + & \dots & = & 0 \\ & & & & \dots & & & & & & \end{array}$$

Repetindo o processo de eliminação para as outras incógnitas, obtém-se um sistema triangular que pode ser resolvido por substituição regressiva. Aplicando seu método ao conjunto das onze equações confiáveis da Figura 8, Gauss constrói o sistema triangular da Figura 9, onde obtém por substituição, em sequência, $d\iota$, $d\Omega$, $d\phi$, $d\gamma$, $d\pi$ e dL . É importante destacar que a notação utilizada por Gauss descarta as equações da álgebra

⁸ A notação que se popularizou utiliza colchetes ao invés da notação com parênteses empregada em (Gauss e Bertrand, 1857). A notação com colchetes apareceu em seu trabalho “*Disquisitio de elementis ellipticis Palladis*” (Uma discussão sobre os elementos elípticos de Pallas) de 1810 (Gauss, 1811, p. 22).

⁹ Gauss reduz Ω a soma de quadrados à forma $\frac{A^2}{(aa)} + \frac{B^2}{(bb,1)} + \frac{C^2}{(cc,2)} + \dots + (nn, \mu)$, onde:

- μ é a quantidade de variáveis,
- A depende de $p, q, r, \dots$,
- B depende de $q, r, \dots$,
- C depende de $r, \dots$.

Assim, “o mínimo valor corresponde aos valores das incógnitas para as quais $A = 0, B = 0, C = 0, \dots$ e, iniciando a resolver o sistema com a última equação, a qual contém somente uma delas, encontra-se o valor de $p, q, r, \dots$ ” (Gauss e Bertrand, 1855, p. 139, tradução nossa).

simbólica, permitindo uma organização mais eficiente do trabalho. Em seus cálculos, ele escrevia uma lista de números utilizando a notação (xy, k) para identificar os valores (Gauss e Bertrand, 1855, p. 139-140).

Figura 9 – Sistema triangular a partir do qual Gauss obteve as correções dos elementos das órbitas de Pallas (Gauss, 1855, p. 141).

$$\begin{aligned} 0 &= + 17'', 11 + 5,42383 \, d i, \\ 0 &= + 75'', 23 + 2,22346 \, d \Omega - 0,37766 \, d i, \\ 0 &= + 25'', 66 + 9,29213 \, d \varphi - 0,36175 \, d \Omega - 0,57384 \, d i, \\ 0 &= - 115'', 81 + 0,71612 \, d \pi + 1,11063 \, d \varphi - 0,06392 \, d \Omega \\ &\quad + 0,25868 \, d i, \\ 0 &= - 13854'' + 2458225 \, d l + 62,13 \, d \pi - 0,51058 \, d \varphi \\ &\quad + 213,84 \, d \Omega + 73,45 \, d i, \\ 0 &= - 371'', 09 + 5,91569 \, d L + 7203,91 \, d l - 0,00344 \, d \pi \\ &\quad - 2,20516 \, d \varphi - 0,34664 \, d \Omega - 0,18194 \, d i; \end{aligned}$$

Legendre (1805, p.74) considerou várias medidas da observação de uma grandeza com erros na forma

$$E = a + bx + cy + fz + \dots$$

onde $a, b, c, f, \dots$ são coeficientes conhecidos que variam de uma equação para outra e $x, y, z, \dots$ são as incógnitas comuns a todas as equações tal que o valor de E para cada equação seja zero ou aproximadamente zero. Se o número de equações superar o número de incógnitas, é impossível eliminar todos os erros. Assim, Legendre sugere minimizar a soma do quadrado dos erros, ou seja, de

$$E^2 + E'^2 + E''^2 + \dots$$

ou,

$$\begin{aligned} &(a + bx + cy + fz + etc.)^2 + (a' + b'x + c'y + f'z + etc.)^2 \\ &+ (a'' + b''x + c''y + f''z + etc.)^2 + \dots \end{aligned}$$

Então, ele iguala a zero as derivadas parciais dessa soma em relação às incógnitas, obtendo “dessa forma tantas equações mínimas quantas forem as incógnitas, e essas equações deverão ser resolvidas por métodos comuns” (Legendre, 1805, p.75, tradução nossa). Por exemplo, na notação empregada por Legendre, a equação mínima com relação a x , é

$$0 = \int ab + x \int b^2 + y \int bc + y \int bc + z \int bf + etc.$$

onde $\int ab$ representa a soma dos produtos semelhantes $ab + a'b' + a''b'' + etc.$; $\int b^2$ representa a soma dos quadrados dos coeficientes de x , a saber, $b^2 + b'^2 + b''^2 + etc.$, e assim por diante.

Em 1809, quando publicou seu método para calcular a órbita de corpos celestes, Gauss reivindicou ter desenvolvido o método dos mínimos quadrados em 1795:

“Nosso princípio, que utilizamos desde o ano de 1795, foi recentemente publicado por Legendre na obra *Nouvelles methodes pour la determine des orbites des cometes*, Paris, 1806, onde foram explicadas várias outras propriedades deste princípio, que, por uma questão de brevidade, omitimos aqui.” (Gauss, 1809, p. 221, tradução nossa).

Começou então uma das mais famosas disputas de prioridades da história da matemática. Embora seu nome tenha sido mencionado por Gauss, Legendre ficou muito ofendido com a declaração de Gauss e em uma carta a Gauss datada de 31 de maio de 1809, “com elogios ao novo livro, indicou que as afirmações de prioridade não devem ser feitas sem comprovação por publicações anteriores” (Celmiņš, 1998, p.123, tradução nossa). Gauss não lhe respondeu. Legendre, ainda, aproveitou a oportunidade da publicação em 1820 de um segundo suplento às suas memórias de 1805, para atacar publicamente as reivindicações de prioridade de Gauss.

Em 1838, Friedrich Wilhelm Bessel e Johann Jacob Bayer popularizaram a abordagem de Gauss, quando a notação passou a ser adotada pelos cartógrafos e os cálculos de Gauss tornaram-se parte do currículo de matemática dos geodestas (Brezinski; Meurant; Zaglia, 2022, p 61).

O professor americano William Chavenaut (1868, p. 514, tradução nossa) contribui para a popularização do método da eliminação nos Estados Unidos:

“Qualquer que seja o método em que a eliminação seja realizada, chegaremos necessariamente aos mesmos valores finais das quantidades desconhecidas; mas, quando o número de equações é considerável, o método de substituição, com a conveniente notação de GAUSS, é universalmente seguido.”.

Segundo (Grcar, 2011, p. 187), em 1878, o calculista ou computador humano Myrick Hascall Doolittle, então na *Computing Division of the U.S. Coast and Geodetic Survey* em Washington, apresentou, usando um pequeno exemplo numérico (Figura 10), um método para resolver as equações normais decorrentes de problemas de triangulação¹⁰.

Figura 10 – Sistema linear utilizado por Doolittle na descrição do seu método (Doolittle, 1878, p. 115).

$$\begin{array}{ll}
 1. & 0 = + 5.4237w + 2.1842x - 4.3856y + 2.3542z - 3.6584 \\
 2. & 0 = + 2.1842w + 6.9241x - 1.2130z + 2.8563 \\
 3. & 0 = - 4.3856w + 12.8242y + 3.4695z + 8.7421 \\
 4. & 0 = + 2.3542w - 1.2130x + 3.4695y + 7.1243z + 0.6847
 \end{array}$$

Thomas Wallace Wright (1884) em sua obra “*A Treatise on the Adjustment of Observations*”, usando a notação de colchetes de Gauss, oferece, na seção intitulada “*Combination of the direct and indirect methods of solution*”, uma descrição clara do método de Doolittle. Doolittle alternou entre duas tabelas para fazer a eliminação e entre outras duas para a substituição regressiva, encontrando as incógnitas com três casas decimais. Se a precisão alcançada não for suficiente, uma nova etapa deve ser realizada, a qual Wright chamou de eliminação indireta e que inicia com a substituição dos valores encontrados nas equações originais, gerando resíduos com um número suficiente de casas decimais para garantir a precisão desejada. Com o auxílio de mais duas tabelas, com os resíduos transportados para a primeira coluna de uma delas, ele refina a solução aproximada. Sem uma máquina de calcular à sua disposição e usando apenas lápis, papel e tabelas de multiplicação de Crelle¹¹ de três dígitos (Grcar, 2011, p. 188), Doolittle, com o auxílio de J. G. Porter, resolveu “em cinco dias e meio, ou 36 horas de trabalho, com precisão muito maior do que o necessário, 41 equações contendo [...] 430 termos no total. Cada um de nós fez uma solução completa, duplicando o trabalho e fazendo comparações frequentes para evitar erros” (Doolittle, 1878, p. 117, tradução nossa). Doolittle (1878, p. 117-120) também explicou como adicionar novas equações sem recalcular tudo do princípio.

Embora não estivesse organizado em termos de fatoração de uma matriz, o algoritmo era o equivalente, em termos modernos, a fatoração LU, a qual consiste em decompor uma matriz $[A]$ em um produto $[A] = [L][U]$ em uma sucessão de n etapas intermediárias, onde n é a ordem do sistema, $[L]$ é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária e a matriz $[U]$ é triangular superior. A fatoração LU da matriz $[A]$ do sistema da Figura 10 resulta em

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,403 & 1 & 0 & 0 \\ -0,809 & 0,292 & 1 & 0 \\ 0,434 & -0,358 & 0,685 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5,424 & 2,184 & -4,386 & 2,354 \\ 0 & 6,044 & 1,766 & -2,161 \\ 0 & 0 & 8,762 & 6,004 \\ 0 & 0 & 0 & 1,215 \end{bmatrix} \quad (10)$$

A matriz $[U]$ da Equação 10 corresponde, aproximadamente, à matriz obtida a partir valores presentes nas linhas A.1, A.3, A.5 e A.7 das colunas 4 a 7 de uma das tabelas do processo de computação de Doolittle, que é apresentada na Figura 11(a). Os elementos da matriz $[L]$ abaixo da diagonal unitária, por sua vez, correspondem, aproximadamente, aos valores presentes nas colunas x, y e z das linhas C.1, C.2 e C.3 de outra tabela da computação, exibida na Figura 11(b). A fatoração LU será apresentada em detalhes na segunda parte do artigo.

¹⁰ A triangulação é um tipo de levantamento que utiliza os princípios da trigonometria para determinar posições na superfície da Terra (ou seja, latitude e longitude).

¹¹ Publicadas pela primeira vez em 1820, as tabelas de cálculo (*Rechentafeln*) do matemático alemão August Leopold Crelle fornecem o produto de todos os números inteiros de 1 a 1000. Em 1836, Crelle publicou as tabelas de facilitação (*Erleichterungstafeln*), que possibilitavam o cálculo do produto de dois números de até 10 milhões (Roegel, 2024).

Figura 11 – Duas das tabelas geradas pela aplicação do método de Doolittle ao sistema linear da Figura 10, onde é possível visualizar os elementos das matrizes (a) [L] e (b) [U], resultantes da fatoração LU da matriz [A] sistema (Doolittle, 1878, p. 115-116).

A.							
1	2	3	4	5	6	7	8
			w	x	y	z	
1	1		+5.424	+2.184	-4.386	+2.354	-3.658
2	2	-.184	w =	-.401	+ .807	-.433	+ .6731
3	5			+6.048	+1.759	-2.157	+4.323
4	6	-.165		x =	-.29	+ .356	-.7133
5	10				+8.77	+5.996	+4.538
6	11	-.114			y =	-.684	-.5173
7	16					+1.236	+0.704
8	17	-.809				z =	-.57

(a)

C.				
	Reciprocal.	x	y	z
1	-.184	-.401	+ .807	-.433
2	-.165		-.29	+ .356
3	-.114			-.684
4	-.809			

(b)

3 ELIMINAÇÃO DE GAUSS

A eliminação gaussiana é um método de resolver o sistema da Equação 3 conduzindo a matriz aumentada

$$[A | b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right] \quad (11)$$

para a forma triangular superior

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right] \quad (12)$$

onde as variáveis foram progressivamente eliminadas das linhas e podem ser calculadas regressivamente a partir da última linha. A eliminação de Gauss consiste, assim, em 2 passos:

- 1) **Eliminação progressiva:** as equações são manipuladas para eliminar as variáveis, resultando em uma equação com uma variável na última linha, duas variáveis na penúltima linha e assim por diante;
- 2) **Substituição regressiva:** essa equação, pode ser resolvida diretamente e o resultado substituído regressivamente para determinar as variáveis eliminadas.

3.1 Eliminação progressiva

O passo inicial é eliminar a variável x_1 na 2ª linha da matriz da Equação 11, multiplicando a sua primeira linha por a_{21}/a_{11} para obter

$$a_{21} + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \quad (13)$$

Ato contínuo, subtrai-se a 2ª linha da Equação 11 da Equação 13, obtendo-se

$$\left(a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}\right) + \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right) + \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right) + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right) = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \quad (14)$$

ou

$$a_{22}^{(1)} + a_{23}^{(1)} + \dots + a_{2n}^{(1)} = b_2^{(1)} \quad (15)$$

onde o símbolo “⁽¹⁾” indica que os coeficientes foram modificados de seus valores originais.

O processo de eliminação progressiva é repetido para as linhas restantes. Por exemplo, a primeira linha da Equação 11 é multiplicada por a_{31}/a_{11} e subtraída da terceira equação. A matriz aumentada assim obtida, torna-se:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right] \quad (16)$$

Nos passos precedentes, a_{11} é chamado de elemento pivô, que se for nulo pode interferir no processo.

O próximo passo é eliminar x_2 da terceira linha em diante utilizando $a_{22}^{(1)}$ como elemento pivô, resultando na matriz apresentada na Equação 17.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right] \quad (17)$$

onde o símbolo “⁽²⁾” indica que o elemento foi alterado duas vezes.

O último passo do processo é usar a $(n-1)$ -ésima equação para eliminar o termo x_{n-1} da enésima equação. A matriz aumentada da Equação 11, assim, transforma-se na matriz triangular superior da Equação 12.

Durante a fase de eliminação é possível que um elemento da diagonal principal se torne zero ou muito próximo de zero. No primeiro caso, a normalização dessa linha irá envolver uma divisão por zero. No segundo caso, se a ordem de grandeza do elemento pivô tornar-se muito pequena quando comparada a dos outros elementos, poderão ocorrer erros de arredondamento (Chapra; Canale, 2011, p. 215).

Assim, com o objetivo de evitar erros de arredondamento, é necessário assegurar que os pivôs não sejam muito pequenos. Logo a cada passo, é aconselhável utilizar o maior elemento pivô em valor absoluto. Assim, antes de cada passo da eliminação progressiva, encontra-se o maior coeficiente na coluna a partir do elemento pivô. Feito isso, trocam-se as linhas de modo que o coeficiente de maior magnitude seja o elemento pivô. Esse procedimento é conhecido como pivotamento parcial.

Quando se permuta as linhas e as colunas de tal modo que o pivô utilizado é maior coeficiente da matriz, tem-se o pivotamento completo. O pivotamento completo é raramente utilizado pois, a pesquisa bidimensional em cada estágio, além de aumentar a complexidade do algoritmo, envolve uma sobrecarga aritmética de ponto

flutuante significativa. (Golub; Van Loan, 2013. p. 132). O pivotamento não é necessário quando a matriz de coeficientes $[A]$ for diagonal dominante¹² ou simétrica positiva definida¹³ (Sewell, 2005, p. 5-7).

A Figura 12 é utilizada para auxiliar na compreensão da estratégia adotada para acrescentar o pivotamento parcial em uma função que implemente a eliminação progressiva em uma matriz. Considerando, para efeito de análise, que à medida que o pivô avança para a coluna i , o maior coeficiente abaixo do elemento pivô esteja sempre na última linha r da submatriz analisada ou na última linha l da matriz original (4×4), é possível, com o auxílio da Tabela 3, estabelecer a seguinte relação entre i , r e l :

$$l = r + i - 1 \quad (18)$$

Essa relação é necessária porque a permutação é feita na matriz original.

Figura 12 – Representação esquemática do pivotamento parcial.

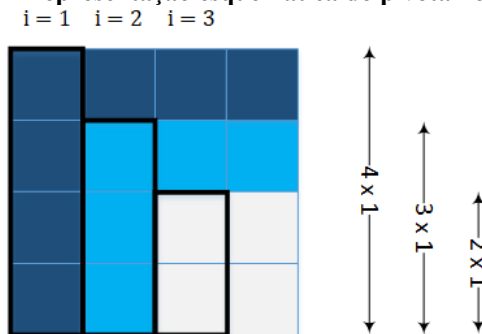


Tabela 3 – Relação entre as linhas de matriz original (4×4) e da submatriz $(n - i - 1) \times (n - i - 1)$.

Dimensão da submatriz	l	r	i
4×4	4	4	1
3×3	4	3	2
2×2	4	2	3

Um algoritmo para implementação da eliminação progressiva com pivotamento deverá conter três laços, descritos abaixo, do mais externo para o mais interno:

1. A variável i do laço mais externo indica a linha (ou coluna) do elemento utilizado como pivô (a_{ii}) para zerar as colunas das linhas abaixo dela (linhas $i + 1$). Assim, i vai de 1 até $n - 1$. No início desse laço, encontra-se o maior coeficiente na coluna a partir do elemento pivô e, se necessário, trocam-se as linhas de modo que o coeficiente de maior valor absoluto seja usado como pivô;
2. Cria-se um laço interno ao laço controlado pela variável i , para zerar os elementos da coluna abaixo do elemento pivô. Esse laço é controlado por uma variável j , que excursionará por valores que permitam percorrer todas as linhas abaixo da i -ésima linha, ou seja, j vai de $i + 1$ até n .
3. Como todos os elementos de uma linha j são modificados, dentro do laço controlado por j , cria-se um laço controlado por uma variável k , que terá valores que permitirão modificar todas as colunas de uma linha. Assim, k vai de 1 até $n + 1$, uma vez que a eliminação de Gauss é feita sobre a matriz aumentada $[A | b]$.

A Figura 13 apresenta o comportamento das variáveis de laço durante o processo de eliminação progressiva em uma matriz aumentada $n \times (n + 1)$, onde $n = 4$.

¹² Uma matriz $[A]$ é diagonal dominante se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

, isto é, se o valor absoluto do coeficiente da diagonal em cada uma das linhas for maior que a soma do valor absoluto dos outros coeficientes da linha.

¹³ Uma matriz $[A]$ é simétrica se $[A]^T = [A]$ e positiva definida se $\{x\}^t [A] \{x\} > 0$ para todo $\{x\} \neq 0$.

Figura 13 – Representação esquemática do pivotamento parcial.

$i = 1:n-1$	1	2	3	4	5	
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	1
$j = i+1:n$	0	a'_{22}	a'_{23}	a'_{24}	b'_2	2
	0	0	a'_{33}	a'_{34}	b'_3	3
	0	0	0	a'_{44}	b'_4	4
	$k = i:n+1$					

O algoritmo que permite eliminar, progressivamente os elementos da primeira coluna de $[A | b]$, a partir da segunda linha, da segunda coluna a partir da terceira linha até alcançar penúltima coluna e a última linha, é apresentado no Quadro 1 na forma de pseudocódigo. Por conveniência, no lugar dos elementos que deveriam ser anulados, ou seja, nas colunas abaixo do pivô, armazenam-se os elementos multiplicadores a_{ji}/a_{ii} . Assim, k passa a ir de $i+1$ até $n+1$. O leitor verá, na segunda parte desse artigo, que esses multiplicadores são utilizados na Fatoração LU da matriz $[A]$.

Quadro 1 – Algoritmo para eliminação de Gauss com pivotamento.

```

Para i = 1 até n - 1 faça
  "Procura a linha k do coeficiente de maior valor absoluto na coluna i a
  partir do elemento pivô"
  l = r + i - 1
  Se l ≠ i então
    "Troca a linha l pela linha i"
  fim se
  Para j = i + 1 até n faça
     $a_{ji} = (a_{ji} / a_{ii})$ 
    Para k = i até n + 1 faça
       $a_{jk} = a_{jk} - a_{ji} \times a_{ik}$ 
    fim para
  fim para
fim para

```

Exemplo 1 – Use a eliminação progressiva de Gauss com pivotamento para transformar a matriz aumentada do sistema em sua forma triangular superior

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Para utilizar o maior elemento pivô em valor absoluto, troca-se a primeira linha com a segunda linha e forma-se a matriz aumentada

$$[A | b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Em seguida, multiplica-se a primeira linha da matriz por $1/2$ e subtrai-se o resultado da segunda linha e, na sequência, multiplica-se a primeira linha da matriz por $1/3$ e subtrai-se o resultado da terceira linha,

$$[A | b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -1 & -2 \\ 3 - 6 \cdot \frac{1}{2} & 1 - 3 \cdot \frac{1}{2} & 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} & 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \\ 2 - 6 \cdot \frac{1}{3} & 3 - 3 \cdot \frac{1}{3} & 1 + 1 \cdot \frac{1}{3} & 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

resultando nas novas segunda e terceiras linhas

$$[A | b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & 3 \\ 0 & 2 & 4/3 & 5/3 \end{array} \right]$$

Para encerrar o processo de eliminação progressiva e utilizar o maior elemento pivô em valor absoluto, troca-se a segunda linha com a terceira linha, obtendo-se:

$$[A | b] = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & -1/2 & 5/2 & 3 \end{bmatrix}$$

Na sequência, multiplica-se a segunda linha da matriz resultante por $-1/4$ e subtrai-se o resultado da terceira linha para obter

$$[A | b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4/3 & 5/3 & 5/3 \\ 0 & -\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} & \frac{5}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} & 3 + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} & \end{array} \right]$$

, resultando na matriz triangular superior

$$[A | b] = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 17/6 & 41/12 \end{bmatrix}$$

■

A função Scilab^{©14} que implementa o processo de eliminação progressiva de uma matriz é apresentada no **Erro! Fonte de referência não encontrada..** Os termos a_{jk} calculados no algoritmo do Quadro 1, na função Scilab[©], são obtidos utilizando-se o for implícito

```
A(j,i+1:nb) = A(j,i+1:nb) - A(j,i) * A(i,i+1:nb);
```

equivalente a forma explícita

```
for k = i+1:nb
    A(j,k) = A(j,k) - A(j,i) * A(i,k);
end
```

Observe que função nativa do Scilab[©] `max` é utilizada para encontrar o coeficiente de maior magnitude na coluna i do elemento pivô:

```
[maior, k] = max(abs(A(i:n,i)));
l = i + k - 1;
if l ~= i then
    A([l,i],:) = A([i,l],:);
    P([l,i],:) = P([i,l],:);
    p = p + 1
end
```

onde `maior` é o maior elemento do vetor coluna e `k` é o índice correspondente a linha desse elemento. Após o ajuste do índice, caso necessário a troca das linhas é realizada.

Registra-se, ainda, que foram criados uma matriz de permutação $[P]$ e um escalar p para registrar os pivotamentos realizados, ação necessária para que a função seja utilizada, posteriormente, na Fatoração LU e no cálculo do determinante da matriz $[A]$.

¹⁴ Criado por pesquisadores do INRIA (*Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*) e do ENPC (*École Nationale des Ponts et Chaussées*) e disponível como software gratuito e de código aberto desde 1994, o Scilab[©] é destinado a engenheiros e cientistas. Atualmente, é desenvolvido pela Dassault Systèmes.

Quadro 2 – A função Scilab® que implementa o processo de eliminação progressiva com pivotamento de uma matriz.

```

function [A, P, p]=Escalonamento(A, n, f)
/* Eliminação progressiva com pivotamento da matriz A de n linhas
Para uso com Gauss: f = 1, o número de colunas de A será n + f
Para uso com LU: f = 0
Retorna: A - Matriz escalonada e
        P - Matriz de pivotamento (para uso com fatorlu)
        p - Número de pivotamentos realizados (p/ uso com
           a função determinante) */
P = eye(n,n);
nb = n + f
p = 0
for i = 1:n-1
    [maior, k] = max(abs(A(i:n,i)));
    l = i + k - 1;
    if l ~= i then
        A([l,i],:) = A([i,l],:);
        P([l,i],:) = P([i,l],:);
        p = p + 1
    end
    for j = i+1:n
        A(j,i) = A(j,i) / A(i,i)
        A(j,i+1:nb) = A(j,i+1:nb) - A(j,i) * A(i,i+1:nb);
    end
end
endfunction

```

3.2 Substituição regressiva

Após a matriz ser escalonada, passa-se agora a etapa conhecida como substituição regressiva, onde obtém-se os valores das n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$. Para facilitar a compreensão das equações necessárias para obtenção do vetor $\{x\}$, apresenta-se, na Equação 19, o sistema de equações obtido a partir da matriz aumentada escalonada da Equação 12.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \quad (19)$$

Da última linha da Equação 19, obtém-se:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad (20)$$

Esse resultado é substituído na $(n - 1)$ -ésima linha da Equação 19 para determinar x_{n-1} . Esse processo de substituição regressiva continua até que a variável x_1 seja obtida por

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \quad (21)$$

Analisando a Equação 21, obtém-se a fórmula recursiva para obter as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$:

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad (22)$$

onde $i = \{n - 1, n - 2, \dots, 1\}$.

Exemplo 2 – Resolva o sistema do Exemplo 1 por eliminação de Gauss com pivotamento.

No Exemplo 1, obteve-se a matriz triangular superior

$$[A | b] = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 17/6 & 41/12 \end{bmatrix}$$

Utilizando os coeficientes da matriz $[A | b]$, por substituição regressiva, calcula-se x_3 pela Equação 20, x_2 e x_1 através da Equação 22:

$$x_3 = \frac{41/12}{17/6} = 1,205882$$

$$x_2 = \frac{(5/3) - (4/3) \cdot 1,205882}{2} = 0,029412$$

$$x_1 = \frac{-2 + (1 \cdot 1,205882 - 3 \cdot 0,029412)}{6} = -0,147059$$

■

A função Scilab[®] que permite resolver, regressivamente o vetor $\{x\}$ é apresentado no Quadro 3. Nela, o somatório da Equação 22 foi implementado valendo-se de um “for” implícito, que só é possível porque $A(i, i+1:n)$ é um vetor linha e $x(i+1:n)$ é um vetor coluna:

$$x(i) = (b(i) - A(i, i+1:n) * x(i+1:n)) / A(i, i)$$

equivalente a forma explícita

```
for j = i+1:n
    x(i) = x(i) + A(i,j) * x(j);
end
x(i) = (A(i,nb) - x(i) ) / A(i,i);
```

Quadro 3 – A função Scilab[®] que resolve um sistema triangular superior por substituição regressiva.

```
function x=Substituicaoore(A, b, n)
/* Substituição regressiva
A - Matriz de coeficientes escalonada
b - vetor de termos independentes
n - número de linhas da matriz
Retorna: x - vetor solução */
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (b(i) - A(i,i+1:n) * x(i+1:n)) / A(i,i)
end
endfunction
```

Dada a equação matricial $[A]\{x\} = \{b\}$ quando $[A]$ é uma matriz $n \times n$, a função Scilab[®] que verifica a consistência dos dados de entrada, ou seja, se a matriz $[A]$ é quadrada e se o vetor coluna $\{b\}$ tem o mesmo número de linhas de $[A]$ é apresentada no Quadro 4. Por sua vez, a função que, invocando as funções do Quadro 4 (consistência dos dados), Quadro 2 (escalonamento) e Quadro 3 (substituição regressiva), resolve o sistema de equações lineares por eliminação de Gauss com pivotamento é apresentada no Quadro 5.

Quadro 4 – A função Scilab® para verificar a consistência dos dados de entrada.

```

function n=Consistencia(A, b1)
/* Verifica se A é quadrada e
se o número de linhas de b1 é igual ao de A.
Se b1 não está definido, verifica apenas se A é quadrada. */
[m,n] = size(A);
if m ~= n then
    error('A matriz A deve ser quadrada');
end
if isdef('b1') then
    n = length(b1)
    if m ~= n then
        error('Dimensão incorreta de b');
    end
end
endfunction

```

Quadro 5 – A função Scilab® que resolve um sistema de equações lineares por eliminação de Gauss com pivotamento.

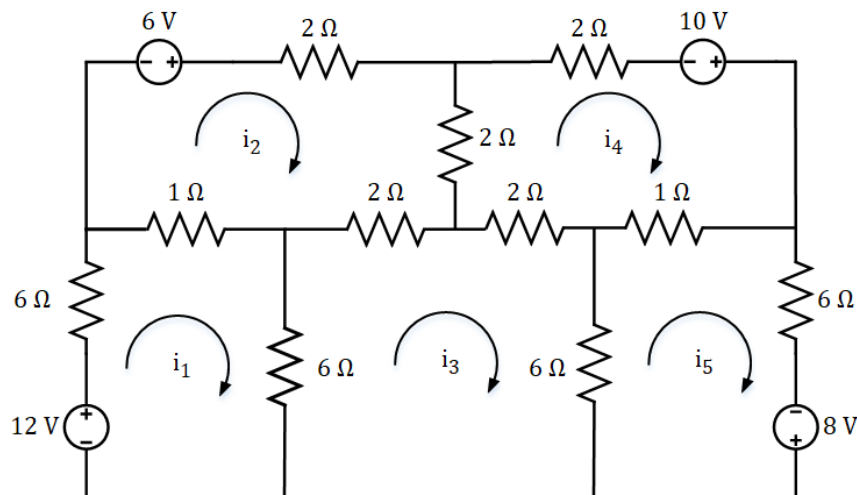
```

function x=Gauss(A, b)
/* Eliminação de Gauss
function x=gaussi(A, b)
onde:
    x é o vetor solução
    b é o vetor coluna de estímulos
    A é a matriz de coeficientes */
n = Consistencia(A,b)
A = [A b];
// Passa A aumentada para escalonamento
[S,P] = Escalonamento(A,n,1)
/* o vetor b é a última coluna da matriz escalonada S
para o processo de substituição regressiva */
x = Substituicao(S(1:n,1:n),S(1:n,n+1),n);
endfunction

```

Lembra-se que, para permitir o uso da função Escalonamento pela função que realizará a Fatoração LU da matriz $[A]$, no lugar dos elementos que deveriam ser anulados, são armazenados os elementos multiplicadores a_{ji}/a_{ii} . Assim, o leitor que tiver interesse de apresentar no console a matriz triangular superior gerada durante o processo eliminação progressiva deverá incluir na função Gauss, após a chamada da função Escalonamento, o comando `disp("Matriz escalonada:", triu(S))`.

Exemplo 3 – Encontre as correntes de malha do circuito elétrico da Figura 14.

Figura 14 – Circuito elétrico do Exemplo 3 com as correntes de malha identificadas.

Solução: o método das correntes de malha permite obter o sistema de equações lineares que representam o circuito da Figura 14. No circuito, foram identificadas cinco malhas e atribuídas as respectivas correntes de malha adotando o sentido horário.

Percorrendo a malha 1 no sentido horário, encontram-se uma elevação de tensão de +12 devido à fonte tensão, uma queda de tensão $-6i_1$ em um resistor de $6\ \Omega$, uma queda de tensão $-1(i_1 - i_2)$ em um resistor de $1\ \Omega$ e uma queda de tensão de $-6(i_1 - i_3)$ em outro resistor de $6\ \Omega$. Como a soma de todas as tensões ao longo malha deve ser zero, resulta:

$$+12 - 6i_1 + (i_1 - i_2) - 6(i_1 - i_3) = 0$$

Analisando as outras malhas, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} +12 - 6i_1 - (i_1 - i_2) - 6(i_1 - i_3) = 0 \\ +6 - 2i_2 - 2(i_2 - i_4) - 2(i_2 - i_3) - (i_2 - i_1) = 0 \\ -6(i_3 - i_1) - 2(i_3 - i_2) - 2(i_3 - i_4) - 6(i_3 - i_5) = 0 \\ -2(i_4 - i_2) + 10 - (i_4 - i_5) - 2(i_4 - i_3) = 0 \\ -6(i_5 - i_3) + (i_5 - i_4) - 6i_5 - 8 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

ou,

$$\begin{cases} -13i_1 + i_2 + 6i_3 = -12 \\ i_1 - 7i_2 + 2i_3 + 2i_4 = -6 \\ 6i_1 + 2i_2 - 16i_3 + 2i_4 + 6i_5 = 0 \\ 2i_2 + 2i_3 - 7i_4 + i_5 = -10 \\ 6i_3 + i_4 - 13i_5 = -8 \end{cases} \quad (24)$$

Na notação matricial, o sistema de equações lineares (Equação 24) é escrito como

$$\begin{bmatrix} -13 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & -16 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \\ -10 \\ -8 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Após a execução de um arquivo `.sci` reunindo todas as funções apresentadas (`Ctrl + Shift + E` no SciNotes), os comandos do Quadro 6 em uma sessão Scilab[®] permitem conhecer as correntes de malha do circuito da Figura 14.

Quadro 6 – Determinação das correntes de malha do circuito elétrico da Figura 14 com o auxílio da função Scilab[®] Gauss.

```
--> A=[-13 1 6 0 0;1 -7 2 2 0;6 2 -16 2 6;0 2 2 -7 1;0 0 6 1 -13];
--> b=[-12; -6; 0; -10; -8]; i=Gauss(A,b)
i =
2.169181
2.6993534
2.25
3.1131466
1.893319
```

■

3.3 Cálculo de determinantes com eliminação de Gauss

O determinante de uma matriz triangular pode ser calculado pelo produto dos elementos da diagonal principal. Como o determinante não se altera no processo de eliminação progressiva, o método de Gauss pode ser aplicado na estimativa de determinantes. Observar que, ao utilizar o pivotamento parcial, o determinante troca de sinal quando há troca de linhas.

A função Scilab[®] que calcula o determinante de uma matriz utilizando a eliminação de Gauss com pivotamento parcial é apresentada no Quadro 7. Observe que foi previsto que a função Escalonamento

computasse cada pivotamento parcial realizado, sendo que esse valor é utilizado para atualizar o resultado do determinante.

Quadro 7 – Função Scilab® para o cálculo do determinante.

```
function dt=Determinante(A)
    n = Consistencia(A)
    [S,P,p] = Escalonamento(A,n,0)
    dt = 1
    for i=1:n
        dt = dt * S(i,i) // Determinante igual ao produtório dos S(i,i)
    end
    dt = dt * (-1)^p
endfunction
```

Exemplo 4 – Com o auxílio da função Scilab® Determinante, encontre o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & -16 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -13 \end{bmatrix}$$

Solução: Inclua a função Determinante No arquivo .sci que reúne todas as funções anteriores e execute-o (Ctrl + Shift + E no SciNotes). Após, digite os comandos do Quadro 8 em uma sessão Scilab® para encontrar o determinante da matriz [A].

Quadro 8 – Determinação do determinante da matriz do Exemplo 4.

```
--> A=[-13 1 6 0 0;1 -7 2 2 0;6 2 -16 2 6;0 2 2 -7 1;0 0 6 1 -13];

--> delta=Determinante(A)
delta =

-59392.
```

3.4 Interface gráfica para uso com o pacote de funções

O *script* Scilab® apresentado no Quadro 9 e no Quadro 10 visa facilitar a entrada e a verificação dos dados, bem como permitir a visualização dos resultados proporcionados pelas funções apresentadas. Antes de executar o *script*, o usuário deve carregar no ambiente Scilab o arquivo .sci reunindo todas as funções do pacote (nos Quadros 2 a 7). No Quadro 9, são apresentadas as funções *callback* ativadas pela interação com o menu e a função responsável por apagar os resultados apresentados na janela gráfica. O trecho de código do Quadro 10 é o responsável por criar a interface gráfica, solicitar os dados de entrada, calcular e apresentar os resultados.

Quadro 9 – Script com a interface gráfica do usuário (GUI) proposta: funções *callback* do menu e função para remover os resultados.

```
function Sobre()
    messagebox(["Marco Valério Miorim Villaça" "Departamento de Eletrônica"...
        "IFSC - Campus Florianópolis"], "Sobre o aplicativo")
endfunction

function Sair()
    close()
endfunction

function Call_gauss()
    Delete();
    Calcular(1);
endfunction

function Call_determinante()
    Delete()
```

```

    Calcular(2)
endfunction

function Delete()
    global m id
    for k = 1:m
        h = findobj("tag",id(k))
        delete(h)
    end
endfunction

```

Quadro 10 – Script com a interface gráfica do usuário (GUI) proposta: configurando a interface e apresentando os resultados.

```

global m id

// Configurando a janela gráfica e criando objeto texto h na janela
hz = 1000;
vt = 700;
m = 1;
id(1) = "1"
f = figure("tag", "figura");
f.figure_position = [0 0];
f.backgroundcolor = [.9 .9 .9]
f.axes_size = [hz vt];
f.figure_name = "Solução de Sistemas Lineares"
mensagem = "Escolha uma opção no menu do aplicativo"
h = uicontrol(f,"style","text","tag",id(1),"string",mensagem,...
    "position",[20,vt - 18,hz - 40,18],"BackgroundColor",[.9 .9 .9],"fontsize",14)

// Removendo o menu padrão e desabilitando as ferramentas gráficas
delmenu(f.figure_id,gettext("&File"));
delmenu(f.figure_id,gettext("&Tools"));
delmenu(f.figure_id,gettext("&Edit"));
delmenu(f.figure_id,gettext("&?"))
toolbar(f.figure_id,"off");

// Criando o menu e submenu do aplicativo
a_menu = uimenu("parent",f,"label",gettext("Menu do Aplicativo"))
h1 = uimenu("parent",a_menu,"label",gettext("Calcular"))
h2 = uimenu("parent",a_menu,"label",gettext("Sair"),"callback","Sair();")
h3 = uimenu("parent",a_menu,"label",gettext("Sobre"),"callback","Sobre();")
h11 = uimenu(h1,'label','Gauss','callback','Call_gauss()');
h12 = uimenu(h1,'label','Determinante','callback','Call_determinante')

// Funções
function Calcular(op)
    global m id
    //Entrada da ordem n e preparando entrada de [A] e {b}
    ok = 1;
    num = (x_dialog('Entre com a ordem da matriz','3'));
    num = evstr(num)
    matriz_default = string(zeros(num,num));
    vetor_default = string(zeros(1:num))
    labelsv = 'linha ' + string(1:num);
    labelsh = 'coluna ' + string(1:num)
    while(ok == 1) // Entrando com [A] e preparando para apresentá-la na janela
        A = x_mdialog('Entre com a matriz [A]:',labelsv,labelsh,matriz_default)
        imprime(1) = sprintf(' Matriz [A]:')
        for j = 2:num+1
            imprime(j) = ""
            for k = 1:num,
                imprime(j) = imprime(j) + sprintf(' %s ',A(j-1,k))
            end
        end
        matriz_default = A;
        A = evstr(A);
        j = j + 1
        if op == 1 then

```

```

// Entrada do vetor {b} e preparação para a apresentação
b = x_dialog('Entre com o vetor {b}:',labelsv,vetor_default)
imprime(j) = msprintf(' Vetor {b} (transposto):');
j = j + 1
imprime(j) = msprintf(' %s ',b);
vetor_default = b';
j = j + 1
// Resolvendo o sistema e resultados no console
b = evstr(b);
x = Gauss(A,b);
disp("A = ",A,"b = ",b,"x = ",x);
j = j + 1
// Preparando para apresentar o vetor solução x na janela de saída
imprime(j) = msprintf(' Vetor solução {x}: ');
for k = 1:num
    j = j + 1
    imprime(j) = msprintf(' %g ',x(k))
end
else
    // Preparando para apresentar o determinante na janela de saída
    imprime(j) = msprintf('Determinante de A = %g',Determinante(A))
end
// Criando o objeto para a apresentação dos resultados
for k = 1:j
    id(k) = string(k)
    h = uicontrol(f,"style","text","tag",id(k),"string",...
        string(imprime(k)),"position",[20,vt - 18 * k,hz - 40,18],...
        "BackgroundColor",[.9 .9 .9],"fontsize",14)
end
ok = x_choose(['Sim';'Não'],['Deseja corrigir os dados de entrada?'])
m = j;
if ok == 1 then
    Delete()
end
end
endfunction

```

Ao ser executado, o *script* cria uma janela gráfica *f* de 1000 x 700 pixels posicionada no canto superior esquerdo da tela e com cor de fundo cinza clara, remove o menu padrão da janela e cria o menu do aplicativo com três possibilidades: “Calcular”, “Sair” ou “Sobre”. Optando pela opção “Calcular”, o usuário deve escolher entre as opções “Gauss” e “Determinante”.

Para resolver um sistema de equações, o usuário deve escolher a opção “Gauss” e, consequentemente, o aplicativo apresenta a primeira caixa de diálogo, criada pela função *x_dialog*, que solicita a ordem da matriz *[A]* (Figura 15(a)). As caixas de diálogo seguintes, proporcionadas pela função *x_mdialog*, solicitam a matriz *[A]* e o vetor *{b}*, conforme a Figura 15(b) e a Figura 15(c), onde se pode observar que foram inseridos os dados fornecidos para a solução do Exemplo 2. O vetor de *strings* *imprime*, onde são gravados os dados inseridos e os resultados obtidos a partir das funções *Gauss* e *Determinante*, é mostrado no objeto *h* da janela gráfica *f*, criado pela função *uicontrol*, em estilo texto com fonte de tamanho 14 e com identificador *id*, distante 20 pixels da margem esquerda e 682 pixels da margem inferior, com espaço reservado de 960 x 18 pixels e cor de fundo cinza clara.

A Figura 16 apresenta os resultados obtidos e a opção de corrigir os dados de entrada oferecida ao usuário pela função *x_choose*. Escolhendo “Não”, o usuário pode inserir um novo sistema de equações ou calcular o determinante de uma matriz, selecionando novamente “Calcular” no menu do aplicativo e optar por “Gauss” ou “Determinante”. A função *Delete()* através da função *findobj* localiza todas as instâncias do objeto gráfico identificado por *id*, para, através da função *delete*, apagar os resultados previamente apresentados na janela gráfica. Para encerrar o programa ou mostrar os créditos, o usuário deve escolher “Sair” ou “Sobre”.

Figura 15 – Caixas de diálogo da interface gráfica para uso com o pacote de funções: (a) entrada da ordem do sistema, (b) entrada da matriz $[A]$ e (c) entrada do vetor $\{b\}$.

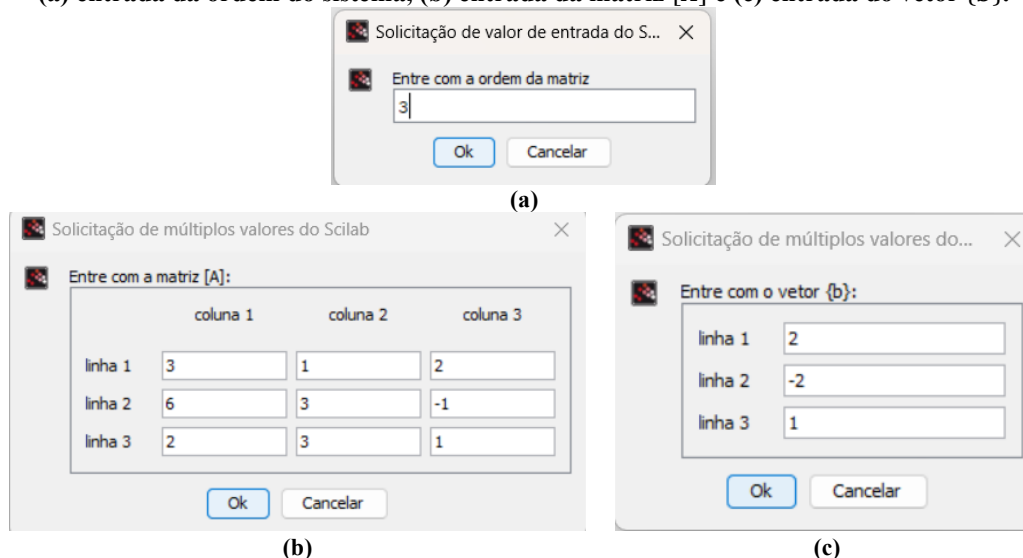
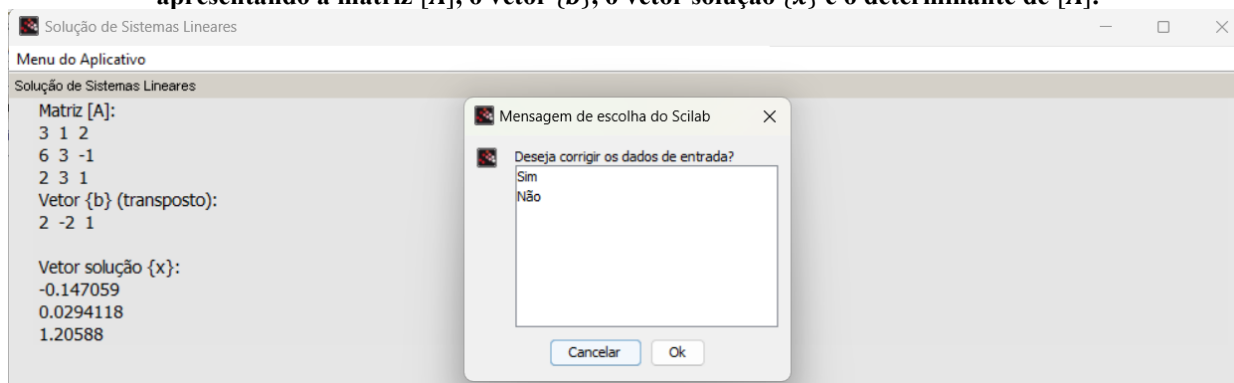


Figura 16 – Janela de saída da interface gráfica para uso com o pacote de funções, apresentando a matriz $[A]$, o vetor $\{b\}$, o vetor solução $\{x\}$ e o determinante de $[A]$.



4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pacotes de computação numérica são amplamente utilizados tanto no ensino quanto na pesquisa. O objetivo central desse estudo foi introduzir um pacote de computação de código aberto com a finalidade de proporcionar uma melhor compreensão do método da eliminação de Gauss e suas duas etapas, a eliminação progressiva e a substituição regressiva.

Entende-se que, ao oferecer a percepção sobre como uma ideia matemática foi elaborada e do contexto em que foi utilizada, a retrospectiva histórica apresentada possa auxiliar na compreensão do método de eliminação gaussiana e das funções Scilab[®] que o implementam. O desenvolvimento científico é motivado pela necessidade de resolução de problemas práticos; olhando quase quatro mil anos para trás, percebe-se que, após a invenção da escrita, resolver problemas envolvendo sistemas de equações sempre foi uma necessidade da mente humana. Como Gauss resolveu sistemas lineares por eliminação de uma forma claramente diferente dos seus antecessores, considerando apenas os coeficientes obtidos durante o processo de eliminação e não reescrevendo as equações em cada etapa do algoritmo, parece justo nomear o método usado hoje como “eliminação gaussiana” ou “eliminação de Gauss”, embora um algoritmo equivalente apareça em textos da China antiga e de autores posteriores.

Uma segunda parte desse artigo completará o pacote proposto, incluindo funções para realizar dois outros métodos voltados à solução de equações lineares simultâneas, as fatorações LU e de Cholesky, bem como apresentará os acontecimentos relevantes do século XX relacionados com a eliminação de Gauss, incluindo o formalismo para a sua realização em termos de operações matriciais, essencial para elaboração de algoritmos para efetuar os cálculos em computadores eletrônicos.

Agradecimentos

O autor agradece ao colega Fernando Luiz Rosa Mussoi pela cuidadosa revisão do texto e suas valiosas contribuições.

REFERÊNCIAS

- ALDRICH, John. Doing Least Squares: Perspectives from Gauss and Yule. **International Statistical Review**. v. 66, n. 1, 1998, pp. 61–81. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1998.tb00406.x>. Acesso em: 17 maio 2024.
- ANTON, H.; RORRES, C. **Elementary Linear Algebra: Applications Version**. John Wiley & Sons, 2014.
- BOSSUT, C. Élimination. In: Panckoucke, C. (ed.). **Encyclopédie méthodique: Mathématiques, Volume 1**. Paris: chez Panckoucke, 1784. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=I16mN1mVgMsC>. Acesso em: 17 maio 2024.
- BREZINSKI, C.; MEURANT, G.A.; ZAGLIA, M.R. **A Journey through the History of Numerical Linear Algebra**. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022.
- BUTEO, J. **Logistica, quae et Arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta**. Gulielmi Rovillius, 1559. <https://books.google.com.br/books?id=ki5PAAAACAAJ>. Acesso em: 17 maio 2024.
- CARDANO, G. **Artis magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus**. Petreius, 1545. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=5HRd3e5pFBsC>. Acesso em: 17 maio 2024.
- CELMINŠ, Aivars. The Method of Gauss in 1799. **Statistical Science**. v. 13, n. 2, p. 123-135, mai, 1998.
- CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para engenharia**. 5. Ed. Porto Alegre : AMGH, 2011.
- CHAUVENET, W. **A treatise on the method of least squares: or, the application of the theory of probabilities in the combination of observations**. Philadelphia: Lippincott & Company, 1868. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=JwmFAAAIAAJ>. Acesso em: 24 maio 2024.
- DOOLITTLE, M.H., Method employed in the solution of normal equations and in the adjustment of a triangularization. In: **1878 US Coast Survey Report**. p. 115–120, Washington: Government Publishing Office, 1881. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=RVf3EAAQBAJ>. Acesso em: 24 maio 2024.
- EULER, Leonhard. **Vollständige anleitung zur álgebra**. Vol 2. Lund: Editora Schiermann, 1771. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=awCNxgW8g98C>. Acesso em: 20 maio 2024.
- GAUSS, C.F. ; BERTRAND, J. **Méthode des moindres carrés**. Paris: Mallet-Bachelier, 1855. <https://books.google.com.br/books?id=LNQ3AAAAMAAJ>. Acesso em: 20 maio 2024.
- GAUSS, C.F. Disquisitio de elementis ellipticis Palladis. **Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores, Volumen I (1808–1811): Commentationes classis mathematicae**, Göttingen: Dieterich, 1811. p. 1–26. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=H4dmWu0OKv4C>. Acesso em: 20 maio 2024.
- GAUSS, C.F. **Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium**. Hamburgo: Sumtibus F. Perthes et I.H. Besser, 1809. <https://books.google.com.br/books?id=zXEyAQAAMAAJ>. Acesso em: 20 maio 2024.
- GILLINGS, R. **Mathematics in the Time of the Pharaohs**. Courier Corporation, 1982.
- GOLUB, G.H.; VAN LOAN, C.F. **Matrix Computations**. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013.
- GOSSELINI, G. **De arte magna**. Paris: Aegidium Beys, 1577. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=pct4fmPpn2UC>. Acesso em: 17 maio 2024.
- GRCAR, J. F. How ordinary elimination became Gaussian elimination. **Historia Mathematica**. v. 38, n. 2, p. 163–218, mai, 2011a.
- GRCAR, J. F. Mathematicians of Gaussian Elimination. **Notices of the American Mathematical Society**. v. 58, n. 2, p. 782–792, 1 jun. 2011b.

- HØYRUP, J. (2010). Old Babylonian “Algebra”, and What It Teaches Us about Possible Kinds of Mathematics. **ICM Satellite Conference - Mathematics in ancient times**, Kozhikode, Índia, 2010. Disponível em: <https://rucforsk.ruc.dk/ws/portalfiles/portal/31560565>. Acessado em: 27 mai. 2024.
- KATZ, V.J. Historical Ideas in teaching Linear Algebra. In: Swetz, F.; Fauvel, J.; Bekken, O.; Johansson, B. e Katz, V. (eds.). **Learn from the Masters**. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1995. p. 189-206.
- LACROIX, S.F. **Elémens d'algèbre, à l'usage de l'école centrale des Quatre-Nations**. Paris: Editora Courcier, 1804. <https://books.google.com.br/books?id=Mhp1XzHZYZkC>. Acesso em: 20 maio 2024.
- LEGENDRE, A. **Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes**. Editora F. Didot, 1805. <https://books.google.com.br/books?id=FRcOAAAAQAAJ>. Acesso em: 20 maio 2024.
- NEWTON, I. **Universal Arithmetick, Or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution: To which is Added, Dr. Halley's Method of Finding the Roots of Aequations Arithmetically**. Londres: J. Senex, W. Taylor, T. Warner e J. Osborn, 1720. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=3_s2AAAAMAAJ. Acesso em: 20 maio 2024.
- PELETIER, J. **L'Algebre**. Jan de Tournes, 1554. Disponível em: Disponível em: Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=thZaAAAACAAJ>. Acesso em: 17 maio 2024.
- RAHN, J.H. **Teutsche Algebra**. J.J. Bodmer, 1659. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=ZJg_AAAACAAJ. Acesso em: 17 maio 2024.
- ROEGEL, D. **A reconstruction of Crelle's Rechentafeln (1820)**. Disponível em: <https://inria.hal.science/hal-00654422>. Acesso em: 3 junho 2024.
- ROLLE, M. **Traité d'algèbre ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique**. Paris: E. Michallet, 1690. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=XmYVAAAAQAAJ>. Acesso em: 17 maio 2024.
- SCHWARTZ, Randy. A Classic from China: The Nine Chapters. **The Right Angle**. Vol. 16, nº 2, p. 8-12, out, 2008.
- SEWELL, Granville. **Pure and applied mathematics**. John Wiley, 2005.
- SIMPSON, T. **A Treatise of Algebra**. Londres: John Nourse, 1755. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=tHo3AAAACAAJ>. Acesso em: 20 maio 2024.
- THE ARTFL PROJECT. **Encyclopédie Méthodique**. Disponível em: <https://encyclopedia.uchicago.edu/content/encyclopédie-méthodique>. Acesso em: 15 maio 2024.
- THE TRUSTEES OF THE BRITISH MUSEUM. **The Rhind Mathematical Papyrus**. Disponível em: https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057. Acesso em: 15 maio 2024.
- WRIGHT, T.W. **A Treatise on the Adjustment of Observations: With Applications to Geodetic Work and Other Measures of Precision**. New York: D. Van Nostrand, 1884. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=525tAAAAMAAJ>. Acesso em: 25 maio 2024.