



CONVOLUÇÃO DE SINAIS: DEFINIÇÃO, PROPRIEDADES E FERRAMENTAS

Miguel Antonio Sovierzoski¹

Resumo: Este trabalho apresenta a operação de convolução para diferentes representações de sinais ou funções, bem como as suas propriedades e o relacionamento com as transformadas de Laplace, de Fourier e Z. Em cada situação abordada da operação de convolução são apresentados os sinais e o desenvolvimento detalhado da operação. Determinadas situações de sinais permitem diferentes soluções para a operação de convolução. Devido aos diferentes tipos de combinações de sinais e ferramentas matemáticas não é possível esgotar o assunto, mas foi apresentada a operação de convolução com diversos tipos de sinais e ferramentas. Através de exemplos foi demonstrado que o uso das transformadas de Laplace ou de Fourier, para sinais contínuos, ou da transformada Z, para sinais discretos, agiliza a resolução da operação de convolução.

Palavras-chave: Convolução. Convolução contínua. Convolução discreta.

Abstract: *This paper presents the operation of convolution with different representations of signals or functions and their properties and relationship with Laplace, Fourier and Z transforms. In each situation, the operation of convolution signals is presented, followed by the detailed development of the solution. In certain situations, the signals allow different solutions to the convolution operation. Due to the extent of combinations of signals and mathematical tools available, the subject cannot be exhaust, but it discussed in a vast majority of situations where the convolution operation is used. It was showed that the use of Laplace transform or Fourier transform for continuous signals or the Z transform for discrete signals, are an easy and quick method to solve the convolution.*

Keywords: *Convolution. Continuous convolution. Discrete convolution.*

¹ Professor da UTFPR <miguelaso@utfpr.edu.br>.

1. INTRODUÇÃO

A operação de convolução é aplicada em várias situações na matemática e na engenharia, fazendo uso de diferentes ferramentas para a sua solução.

Inicialmente é apresentada a definição da operação de convolução e em seguida são abordadas diversas situações de convolução de sinais de tempo contínuo e de tempo discreto utilizando a definição e outras abordagens. São apresentadas também as transformadas de Laplace, de Fourier e Z e o procedimento para resolver a convolução com o uso destas ferramentas.

São apresentados vários exemplos de representações de sinais ou funções: sinais em tempo contínuo, sinais em tempo discreto, sinais de duração infinita e de duração finita. Em todas as situações o objetivo é executar e analisar a operação

de convolução entre os sinais. Cada situação é abordada através de um exemplo numérico para que o leitor possa acompanhar detalhadamente o desenvolvimento e refazer a solução. Um mesmo exemplo pode permitir vários procedimentos para a solução com a aplicação de diferentes ferramentas matemáticas. Não é possível abordar todas as combinações de sinais e de ferramentas para a solução da operação de convolução, mas foi apresentada e exemplificada a grande maioria das situações de sinais envolvendo a operação de convolução.

2. OPERAÇÃO DE CONVOLUÇÃO

A convolução opera com duas funções ou com dois sinais, $x(t)$ e $h(t)$, para gerar uma terceira função ou sinal como resultado da operação, $y(t)$. A interpretação para a função $h(t)$, na engenharia, é

que esta é a resposta impulsiva de um sistema linear e invariante no tempo, mas também não deixa de ser uma função matemática que descreve as características intrínsecas de um sistema. O princípio da superposição é válido em sistemas lineares. Nos sistemas invariantes no tempo, um atraso no sinal de entrada, provoca o correspondente atraso no sinal de saída. A Figura 1(a) apresenta um sistema em tempo contínuo t , com um sinal de entrada $x(t)$ interagindo com a resposta impulsiva $h(t)$, e gerando o sinal de saída $y(t)$. A Figura 1(b) apresenta a mesma ideia para um sistema de tempo discreto n , com um sinal discreto de entrada $x[n]$ interagindo com a resposta impulsiva $h[n]$, e gerando o sinal discreto de saída $y[n]$.

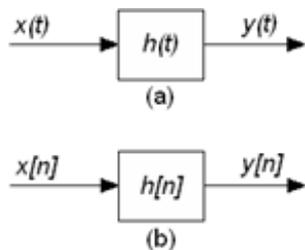


FIGURA 1 – Representação dos sinais em (a) um sistema de tempo contínuo e em (b) um sistema de tempo discreto.

2.1. Convolução de sinais de tempo contínuo

A operação de convolução para sinais de tempo contínuo é definida pela Equação 1, na qual o símbolo * (asterisco) é a representação gráfica da operação de convolução entre as funções $x(t)$ e $h(t)$, e a integral é denominada de integral da convolução. Lê-se que o sinal $y(t)$ é o sinal $x(t)$ convoluído com o sinal $h(t)$. A variável de integração é alterada para τ (letra grega – tal). Na integral de convolução, uma das funções sofre apenas a mudança de variável $x(\tau)$, enquanto a outra função sofre a mudança de variável $h(\tau)$, seguida pela operação de reflexão $h(-\tau)$, e por um deslocamento pela variável t , resultando em $h(t - \tau)$.

$$y(t) = x(t) * h(t) \\ y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \quad [1]$$

A operação de convolução é um operador linear possuindo as propriedades matemáticas de **comutatividade**, de **distributividade** e de **associatividade**, conforme apresentam as Equações 2, 3 e 4, respectivamente. Estas propriedades não serão demonstradas, mas a prova destas e de outras propriedades são encontradas nas referências.

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad [2]$$

$$x(t) * \{y(t) + z(t)\} = x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \quad [3]$$

$$x(t) * \{y(t) * z(t)\} = \{x(t) * y(t)\} * z(t) \quad [4]$$

A convolução de dois sinais contínuos finitos, por exemplo, $x(t)$ com duração L_x e $y(t)$ com duração L_y , resultará num sinal convoluído com duração $L_x + L_y$. Considerando o sinal $x(t)$ contido no intervalo $[I_x, F_x]$, e o sinal $y(t)$ contido no intervalo $[I_y, F_y]$, e devido às operações de reflexão e deslocamento o resultado da convolução dos sinais contínuos finitos estará contida no intervalo $[I_x + I_y, F_x + F_y]$.

2.2. Convolução de sinais de tempo discreto

A definição matemática da convolução para sinais de tempo discreto é semelhante à de sinais de tempo contínuo, sendo que as variáveis envolvidas agora são variáveis discretas, e a integral transforma-se em um somatório, conforme apresenta a Equação 5. A convolução é denominado de soma da convolução.

$$y[n] = x[n] * h[n] \\ y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n - k] \quad [5]$$

As propriedades matemáticas de **comutatividade**, **distributividade** e **associatividade** também se aplicam à convolução de funções discretas, conforme apresentam as Equações 6, 7 e 8.

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad [6]$$

$$x[n] * \{y[n] + z[n]\} = x[n] * y[n] + x[n] * z[n] \quad [7]$$

$$x[n] * \{y[n] * z[n]\} = \{x[n] * y[n]\} * z[n] \quad [8]$$

Para o caso da convolução de sinais discretos finitos, por exemplo, $x[n]$ com L_x amostras e $y[n]$ com L_y amostras, o sinal convoluído possuirá $L_x + L_y - 1$ amostras. Com as amostras significativas de $x[n]$ estando no intervalo $[I_x, F_x]$, e as amostras significativas de $y[n]$ estando no intervalo $[I_y, F_y]$, devido às operações de reflexão e deslocamento, o sinal convoluído estará restrito ao intervalo $[I_x + I_y, F_x + F_y]$.

3. REALIZANDO A CONVOLUÇÃO DE SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO

Este item apresenta exemplos da operação de convolução de sinais de tempo contínuo com duração infinita e finita, utilizando a definição matemática da operação.

3.1. Convolução de sinais contínuos infinitos

Na convolução de sinais contínuos infinitos, foram utilizadas como exemplo duas funções exponenciais decrescentes: $x(t)$, apresentada na

Equação 9, e $h(t)$, apresentada na Equação 10, definidas para $t \geq 0$. As funções trabalhadas para realizar a operação, através da troca de variáveis de t para τ , da operação de reflexão e o deslocamento no sinal h são apresentadas nas Equações 11 e 12. As etapas da operação de convolução para sinais contínuos infinitos são apresentadas na Figura 2.

$$x(t) = 2 \cdot e^{-t} \cdot u(t) \quad [9]$$

$$h(t) = e^{-3t} \cdot u(t) \quad [10]$$

$$x(\tau) = 2 \cdot e^{-\tau} \quad [11]$$

$$h(-\tau) = e^{-3(-\tau)}$$

$$h(t - \tau) = e^{-3(t-\tau)} \quad [12]$$

Para realizar a operação de convolução pela definição, normalmente é necessário o auxílio de gráficos apresentando a interação dos sinais para determinar as condições de integração. Na interpretação da convolução, um sinal permanece na sua posição, no caso da Figura 2, o sinal $x(\tau)$, e o outro sinal $h(t - \tau)$ é posicionado em $t = -\infty$ sendo deslocado até $t = +\infty$ realizando a convolução.

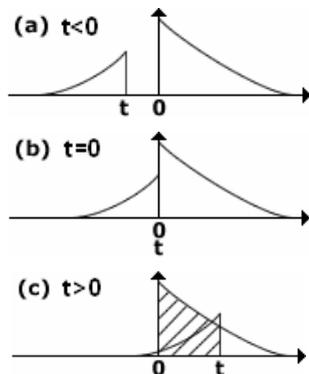


FIGURA 2 – Exemplo da operação de convolução com os sinais contínuos infinitos das Equações 9 e 10, utilizando a definição de convolução contínua.

Para as situações $t < 0$ e $t = 0$, representados pelas Figuras 2(a) e 2(b), resultam em valor 0 para a convolução, pois os sinais não possuem sobreposição.

Para a situação $t > 0$, apresentada pela Figura 2(c), os sinais são sobrepostos, sendo que a convolução dos sinais resulta em valor diferente de 0. Observa-se, na figura, que o intervalo de integração é de 0 até t . A expressão matemática $y(t)$, calculada a partir da definição da convolução é apresentada pela Equação 13.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t 2 \cdot e^{-\tau} \cdot e^{-3(t-\tau)} \cdot d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t 2 \cdot e^{-3t+2\tau} \cdot d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t 2 \cdot e^{-3t} \cdot e^{2\tau} \cdot d\tau$$

$$y(t) = 2 \cdot e^{-3t} \cdot \int_0^t e^{2\tau} \cdot d\tau$$

$$y(t) = 2 \cdot e^{-3t} \cdot \left. \frac{e^{2\tau}}{2} \right|_0^t$$

$$y(t) = 2 \cdot e^{-3t} \cdot \frac{(e^{2t} - 1)}{2}$$

$$y(t) = e^{-3t} \cdot e^{2t} - e^{-3t}$$

$$y(t) = e^{-t} - e^{-3t}$$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-3t}) \cdot u(t) \quad [13]$$

A Figura 3 apresenta o comportamento dos sinais $x(t)$ (Equação 9), $h(t)$ (Equação 10) e da convolução $y(t)$, descrita pela Equação 13.

Com esta análise observa-se que a convolução de dois sinais contínuos infinitos resultou num sinal contínuo infinito. Neste caso, é necessário o auxílio de gráficos (Figura 2), apresentando a interação entre os sinais e determinando os limites de integração para realizar a operação de convolução.

3.2. Convolução de sinais contínuos finitos

Para apresentar a convolução de sinais contínuos finitos, foram utilizados como funções exemplo dois pulsos retangulares $x(t)$ e $h(t)$, apresentados nas Figuras 4(a) e 4(b), respectivamente. Estes sinais elementares possuem a sua definição através de sentenças matemáticas, indicadas pelas Equações 14 e 15.

$$x(t) = u(t) - u(t - 2)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad [14]$$

$$h(t) = 2 \cdot u(t) - 2 \cdot u(t - 4)$$

$$h(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t < 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad [15]$$

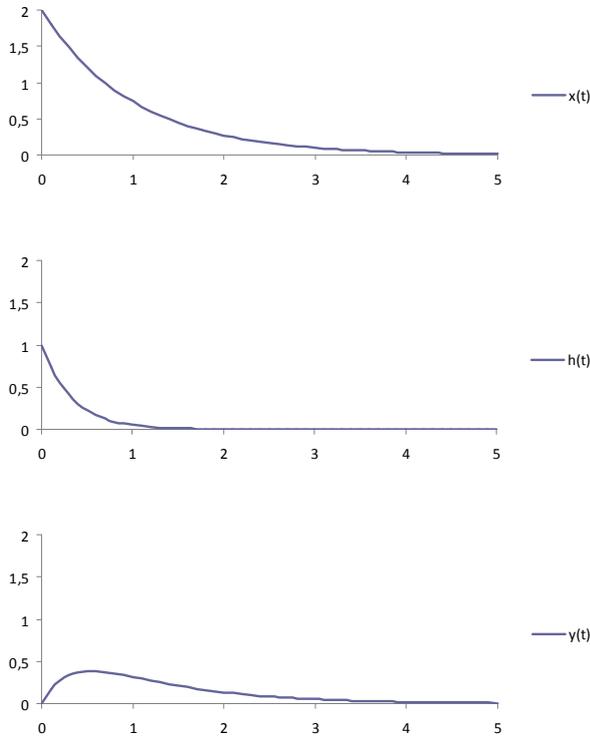


FIGURA 3 – Representação dos sinais das Equações 9 e 10 e o resultado da convolução (Equação 13).

Como regra prática para a execução da convolução, a operação é mais fácil de ser realizada se for utilizado o sinal mais simples para ser refletido e deslocado. Como a operação tem a propriedade de ser comutativa, optou-se por deslocar e refletir o sinal $x(t)$.

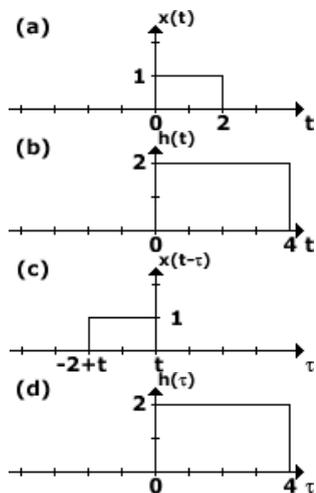


FIGURA 4 – Sinais contínuos finitos das Equações 14 e 15, e suas transformações para a operação de convolução.

As Figuras 4(c) e 4(d) apresentam os sinais preparados para realizar a operação, fazendo a troca de variáveis de t para τ , realizando a operação de reflexão e o deslocamento no sinal $x(t)$, e a troca de variável na função $h(t)$.

Para realizar a operação de convolução pela definição, normalmente é necessário o auxílio de gráficos apresentando a interação dos sinais para determinar o intervalo de integração. Na interpretação da convolução, um sinal permanece estático na sua posição, no caso da Figura 5, o sinal $h(\tau)$. O outro sinal $x(t - \tau)$ é posicionado em $t = -\infty$ sendo deslocado até $t = +\infty$ para realizar a integral da convolução.

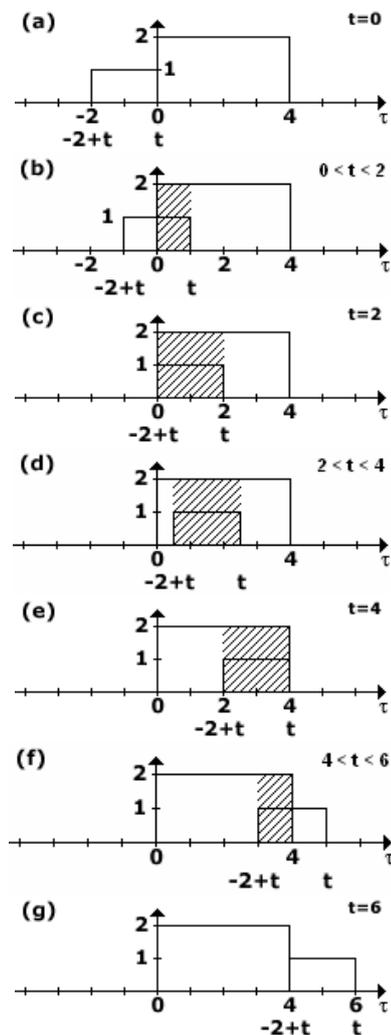


FIGURA 5 – Operação de convolução entre os sinais contínuos finitos das Equações 14 e 15.

O instante $t = 0$, apresentado pela Figura 5(a), resulta em valor 0 para a convolução, pois os sinais estão no limite para iniciar a sobreposição. Para $0 < t < 6$, os sinais são parcialmente ou completamente sobrepostos, sendo que o produto dos sinais e conseqüentemente a área sobre este produto resultam em valor diferente de 0, conforme

apresentam as Figuras 5(b) à 5(f). Uma situação limite ocorre para $t = 2$, sendo que o sinal $x(t - \tau)$ está completamente sobreposto ao sinal $h(\tau)$. Desta forma executa-se a análise para o intervalo $0 \leq t < 2$. Para este intervalo, observa-se na Figura 5(b) que o produto das funções possui o intervalo de integração entre 0 e t . A convolução para o intervalo $0 \leq t < 2$ resulta na função $y(t) = 2 \cdot t$, aumentando linearmente a área determinada pelo produto das duas funções em função do tempo.

No intervalo $2 \leq t < 4$, observa-se que, nas Figuras 5(c), 5(d) e 5(e), o resultado da integral não é alterado, pois o sinal $x(t - \tau)$ encontra-se completamente sobreposto pelo sinal $h(\tau)$, sendo deslocado sob este. Observa-se que o intervalo de integração varia de $-2 + t$ até t . O desenvolvimento da integral de convolução para este intervalo resulta na Equação 16.

$$y(t) = \int_{-2+t}^t 2 \cdot 1 \cdot d\tau$$

$$y(t) = \int_{-2+t}^t 2 \cdot d\tau$$

$$y(t) = 2 \cdot \tau \Big|_{-2+t}^t$$

$$y(t) = 2 \cdot t - 2 \cdot (-2 + t)$$

$$y(t) = 2 \cdot t + 4 - 2 \cdot t$$

$$y(t) = 4 \quad [16]$$

Fazendo a análise para este intervalo, a convolução resulta na função constante $y(t) = 4$, obtida do produto das duas funções multiplicado pela largura do sinal $x(t - \tau)$.

A partir do instante $t = 4$, o sinal $x(t - \tau)$ não está mais completamente sobreposto pelo sinal $h(\tau)$, sendo necessárias novas condições de análise. A Figura 5(f) apresenta esta situação, sendo que o limite ocorre para $t = 6$. Para a análise no intervalo $4 \leq t \leq 6$, o intervalo de integração varia de $-2 + t$ até 4 . O desenvolvimento da integral resulta na Equação 17.

$$y(t) = \int_{-2+t}^4 2 \cdot 1 \cdot d\tau$$

$$y(t) = \int_{-2+t}^4 2 \cdot d\tau$$

$$y(t) = 2 \cdot \tau \Big|_{-2+t}^4$$

$$y(t) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-2 + t)$$

$$y(t) = 8 + 4 - 2 \cdot t$$

$$y(t) = 12 - 2 \cdot t \quad [17]$$

A convolução para este intervalo resulta na função $y(t) = 12 - 2 \cdot t$. Para $t \geq 6$ não há mais sobreposição dos sinais, resultando em valor 0 para a convolução, conforme apresentado na Figura 5(g).

As sentenças que descrevem o resultado da convolução $y(t)$ são apresentadas na Equação 18 e a representação gráfica da convolução é apresentada na Figura 6.

$$y(t) = \begin{cases} 2 \cdot t, & 0 \leq t < 2 \\ 4, & 2 \leq t < 4 \\ 12 - 2 \cdot t, & 4 \leq t \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad [18]$$

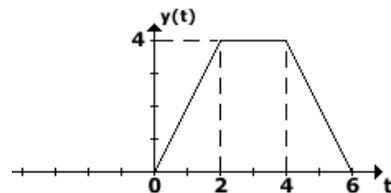


FIGURA 6 – Resultado da convolução da Figura 5, para os sinais contínuos finitos da Figura 4 (Equações 14 e 15).

Como os sinais $x(t)$ e $h(t)$ são contínuos e finitos, observa-se que $L_x = 2$ e $L_h = 4$, resultando em $L_y = 6$. Quanto aos intervalos, para o sinal $x(t)$ o intervalo é $[0, 2]$, e para o sinal $h(t)$ o intervalo é $[0, 4]$, resultando em $y(t)$ no intervalo $[0, 6]$.

Observa-se nesta análise de sinais contínuos finitos que é necessária a realização da convolução por intervalos devido ao sinal possuir descontinuidades, e mudando os intervalos de integração da integral de convolução. Neste caso, é necessário o auxílio de gráficos (Figura 5), apresentando a iteração entre os sinais e determinando os intervalos de integração.

3.3. Convolução de sinal contínuo finito com sinal contínuo infinito

Para apresentar a convolução entre um sinal contínuo finito e um sinal contínuo infinito foram utilizados os sinais exemplos apresentados pelas Equações 19 e 20, cujo comportamento é apresentado pelas Figuras 7(a) e 7(b).

$$x(t) = 2 \cdot u(t) - 2 \cdot u(t - 3) \quad [19]$$

$$h(t) = e^{-2t} \cdot u(t) \quad [20]$$

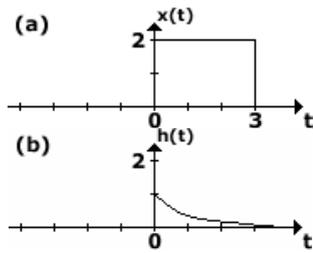


FIGURA 7 – Representação do sinal contínuo finito $x(t)$ e infinito $h(t)$ das Equações 19 e 20.

Aplicando-se a integral da convolução, refletindo e deslocando a função $x(t)$, observa-se na Figura 8(a) que, para $t < 0$, não existe convolução.

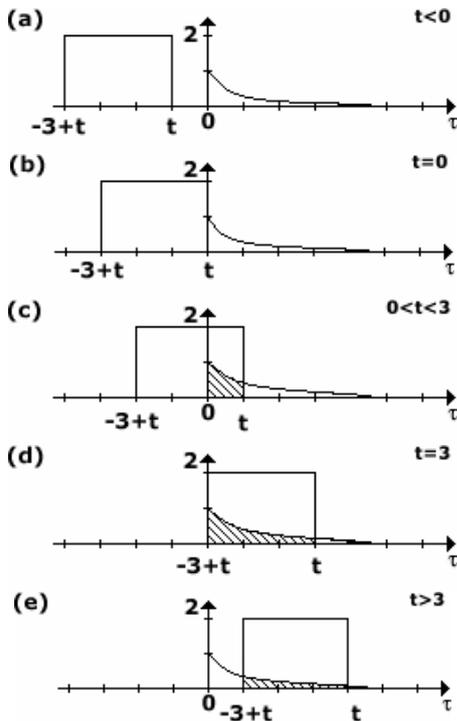


FIGURA 8 – Operação de convolução de um sinal contínuo infinito com um sinal contínuo finito, utilizando a definição de integral de convolução.

A convolução inicia para $t = 0$, como apresenta a Figura 8(b), ocorrendo uma situação limite para $t = 3$, conforme apresenta a Figura 8(d). Para o intervalo $0 \leq t < 3$, observa-se o intervalo de integração de 0 até t , cujo desenvolvimento da integral de convolução é apresentado pela Equação 21.

$$y(t) = \int_0^t 2 \cdot e^{-2\tau} d\tau$$

$$y(t) = -e^{-2\tau} \Big|_0^t$$

$$y(t) = 1 - e^{-2t}, 0 \leq t < 3 \quad [21]$$

Para o intervalo $t \geq 3$, situação apresentada pela Figura 8(e), o sinal finito $x(t)$ continua deslocando-se até o infinito, ocorrendo a convolução com o sinal $h(t)$ até o infinito. Neste intervalo de análise, a integral da convolução possui o intervalo de integração de $-3 + t$ até t , sendo apresentada pela Equação 22.

$$y(t) = \int_{-3+t}^t 2 \cdot e^{-2\tau} d\tau$$

$$y(t) = -e^{-2\tau} \Big|_{-3+t}^t$$

$$y(t) = -(e^{-2t} - e^{-2(-3+t)})$$

$$y(t) = -e^{-2t} + e^6 \cdot e^{-2t}$$

$$y(t) = e^{-2t} \cdot (e^6 - 1), t \geq 3 \quad [22]$$

A convolução das funções $x(t)$ e $h(t)$ resulta na função $y(t)$ apresentada pelas sentenças da Equação 23, cujo comportamento é apresentado pela Figura 9.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-2t}, & 0 \leq t < 3 \\ e^{-2t} \cdot (e^6 - 1), & t \geq 3 \end{cases} \quad [23]$$

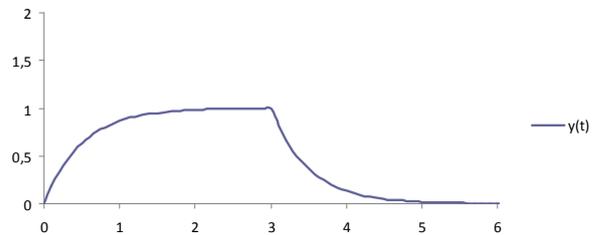


FIGURA 9 – Resultado da convolução dos sinais da Figura 7, obtido na Equação 23.

Observa-se nesta análise que a convolução de um sinal contínuo finito com um sinal contínuo infinito resultou num sinal contínuo infinito. Neste caso, foi necessário o auxílio de gráficos (Figura 8), apresentando a iteração entre os sinais e determinando os limites de integração para realizar a operação de convolução.

4. REALIZANDO A CONVOLUÇÃO DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO

Este item apresenta a operação de convolução de sinais de tempo discreto com duração infinita e finita. Para os sinais discretos finitos existem diferentes abordagens para a resolução da convolução.

Um sinal discreto, finito ou infinito, pode ser representado por uma equação ou por sentenças matemáticas, mas também pode ser entendido e interpretado como uma sequência ponderada de impulsos deslocados.

4.1. Convolução de sinais discretos infinitos

A convolução de sinais discretos infinitos, realizada através da definição da convolução discreta, é apresentada pela Equação 5. As funções exemplos a serem convoluídas são apresentadas pelas Equações 24 e 25.

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n] \quad [24]$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n] \quad [25]$$

Os sinais $x[n]$ e $h[n]$ são aplicados na soma de convolução, conforme apresenta a Equação 26.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot u[k] \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \cdot u[n-k] \quad [26]$$

A função degrau e a função degrau refletida e deslocada são apresentadas pelas Equações 27 e 28. Fazendo o produto das duas funções, obtém-se a Equação 29.

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad [27]$$

$$u[n-k] = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0 \\ 0, & n-k < 0 \end{cases} \quad [28]$$

$$u[k] \cdot u[n-k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad [29]$$

Como o produto das funções degrau unitário e degrau unitário refletida e deslocada é significativo no intervalo $0 \leq k \leq n$, os limites do somatório são alterados, sendo restritos ao intervalo $k = 0$ até n .

A Equação 30 apresenta o desenvolvimento do somatório, que é a operação de convolução discreta.

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \quad [30]$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

A série geométrica é apresentada pela Equação 31.

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1 \\ N, & a = 1 \end{cases} \quad [31]$$

Na Equação 30, aplica-se a série geométrica e opera-se algebricamente até obter a expressão do sinal convoluído $y[n]$ na Equação 32.

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} \cdot u[n]$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)\right]}{\frac{1}{4}} \cdot u[n]$$

$$y[n] = 4 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] \cdot u[n]$$

$$y[n] = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n] - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n] \quad [32]$$

Observa-se na análise que para sinais discretos infinitos não foi necessário o apoio de nenhum recurso gráfico para auxiliar na realização da operação de convolução.

4.2. Convolução de sinais discretos finitos

A convolução de sinais discretos finitos pode ser realizada através de algumas abordagens interessantes, além da definição apresentada pela Equação 5.

Um sinal discreto pode ser decomposto em uma sequência ponderada de impulsos deslocados. Usando como referência a Figura 1, a função $h(t)$ para sinais contínuos e a função $h[n]$ para sinais discretos são denominadas de **resposta impulsiva do sistema**. Em outras palavras, utilizando um impulso unitário como sendo o sinal de entrada do sistema ($x[n] = \delta[n]$), a saída do sistema será a função $h[n]$, pois $y[n] = x[n] * h[n]$.

Como estamos utilizando sistemas lineares, estes possuem a característica de apresentar uma resposta de saída em função de um sinal de entrada. Sendo aplicado um impulso unitário ao sistema, este vai responder com a resposta impulsiva $h[n]$. Se este impulso for deslocado no tempo, a resposta do sistema em função do sinal de entrada sofrerá o mesmo deslocamento no tempo. Fazendo uso da

decomposição do sinal discreto finito em uma sequência ponderada de impulsos deslocados e da característica da resposta impulsiva, podem ser realizadas duas abordagens para a convolução discreta, apresentadas nos próximos itens.

4.2.1. Convolução discreta com abordagem gráfica da resposta impulsiva

A convolução discreta de sinais finitos realizada pela abordagem gráfica da resposta impulsiva é apresentada através de um exemplo. A Figura 10(a) apresenta o sinal de entrada discreto, enquanto a Figura 10(b) reproduz a resposta impulsiva do sistema, ambas com três amostras. O sinal $x[n]$ pode ser decomposto pelas suas amostras ($x[0] = 2$; $x[1] = 1$; $x[2] = -1$) multiplicadas por impulsos deslocados, apresentado na Equação 33.

$$x[n] = 2 \cdot \delta[n] + 1 \cdot \delta[n - 1] - 1 \cdot \delta[n - 2] \quad [33]$$

Aplicando a amostra $x[0]$ da Figura 10(c) no sistema $h[n]$, resulta a resposta impulsiva apresentada pela Figura 10(d). De forma semelhante, as Figuras 10(e), 10(f), 10(g) e 10(h) apresentam as respostas impulsivas para as amostras deslocadas $x[1] \cdot \delta[n - 1]$ e $x[2] \cdot \delta[n - 2]$.

Foi analisado o comportamento do sistema de forma isolada para cada amostra que compõe o sinal de entrada, e que o sinal de entrada corresponde ao somatório destas amostras. Logo, o sinal de saída também corresponde ao somatório das respectivas saídas na Equação 34, pela aplicação do princípio da superposição em sistemas lineares.

$$y[n] = y_0[n] + y_1[n] + y_2[n]$$

$$y[n] = 4 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n - 1] + 4 \cdot \delta[n - 2] - 2 \cdot \delta[n - 4] \quad [34]$$

As Figuras 10(i) e 10(j) apresentam o sinal de entrada e a correspondente convolução discreta.

No exemplo, cada sinal possui três amostras, $L_x = 3$ e $L_h = 3$, resultando numa convolução com cinco amostras pela regra $L_x + L_h - 1$ amostras. A primeira amostra da convolução é $y[0+0] = y[0] = 4$ e a última amostra é $y[2+2] = y[4] = -2$.

Caso os sinais discretos possuam muitas amostras, a análise se alongará, devendo ser realizada para todas as amostras do sinal de entrada.

Nesta abordagem, deve-se determinar a resposta impulsiva para todas as amostras do sinal de entrada, efetuando o somatório destas respostas impulsivas para obter o resultado da convolução.

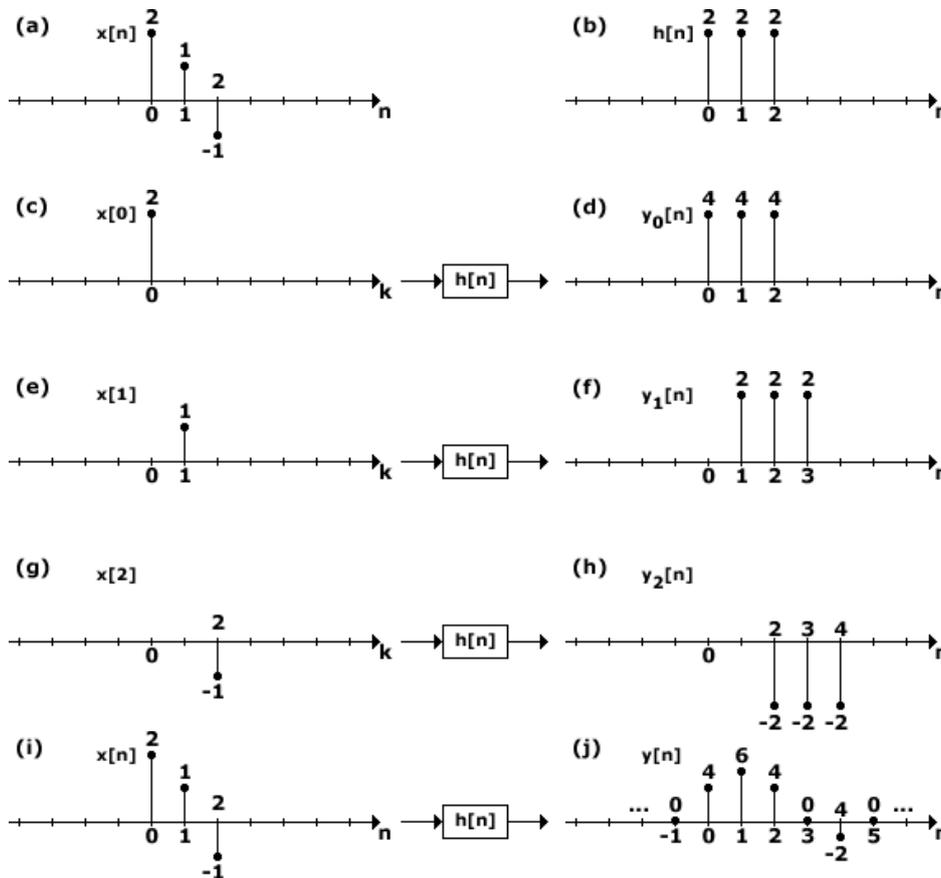


FIGURA 10 – Operação de convolução com sinais discretos finitos, realizada com a abordagem gráfica da resposta impulsiva.

4.2.2. Convolução discreta com abordagem algébrica da resposta impulsiva

Pode-se fazer uso das mesmas propriedades da abordagem anterior para realizar algebricamente a convolução de sinais discretos finitos. Os sinais discretos finitos representados por impulsos ponderados deslocados são apresentados nas Equações 35 e 36.

$$x[n] = 2 \cdot \delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2] \quad [35]$$

$$h[n] = 2 \cdot \delta[n] + 2 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] \quad [36]$$

Usando a propriedade da resposta impulsiva, é apresentada na Equação 37 a forma geral do sinal de saída $y[n]$, deslocando-se e ponderando-se a função $h[n]$ em função de cada impulso componente do sinal de entrada $x[n]$.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = 2 \cdot (h[n]) + (h[n-1]) - (h[n-2]) \quad [37]$$

Substituindo-se a função $h[n]$ original em cada parcela ponderada e deslocada da função de saída, obtêm-se as Equações 38, 39 e 40. Aplicando-se o princípio da superposição nestes resultados parciais obtêm-se o resultado da convolução na Equação 41.

$$y[n] = y_0[n] + y_1[n] + y_2[n]$$

$$y_0[n] = 2 \cdot h[n] = 4 \cdot \delta[n] + 4 \cdot \delta[n-1] + 4 \cdot \delta[n-2] \quad [38]$$

$$y_1[n] = h[n-1] = 2 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + 2 \cdot \delta[n-3] \quad [39]$$

$$y_2[n] = -h[n-2] = -2 \cdot \delta[n-2] - 2 \cdot \delta[n-3] - 2 \cdot \delta[n-4] \quad [40]$$

$$y[n] = 4 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 4 \cdot \delta[n-2] + 0 \cdot \delta[n-3] - 2 \cdot \delta[n-4] \quad [41]$$

Como foram utilizados os mesmos sinais do item 4.2.1 para realizar esta abordagem de convolução discreta, chega-se ao mesmo resultado, com a representação na forma algébrica dos sinais através de impulsos ponderados e deslocados.

Nesta abordagem, foram utilizadas as mesmas propriedades da abordagem anterior, sendo realizada a convolução de forma algébrica, ao invés da forma gráfica.

Na mesma situação do item anterior, caso os sinais discretos possuam muitas amostras, a análise será mais demorada, devendo ser realizada a operação com todas as amostras do sinal de entrada para se obter o resultado da convolução.

4.2.3. Convolução discreta usando a definição

A operação de convolução com sinais discretos foi definida na Equação 5. No processo de resolução, seguem-se os mesmos passos da convolução discreta, diferindo apenas na forma de representação dos sinais.

Nesta abordagem também foram utilizados os mesmos sinais dos dois itens anteriores. Nas Figuras 11(a) e 11(b) são apresentados os sinais $x[n]$ e $h[n]$. A Figura 11(c) e a Figura 11(d) mostram os sinais preparados para realizar a convolução, efetuando a troca de variáveis, a reflexão e o deslocamento do sinal $x[n]$ e do sinal $h[n]$.

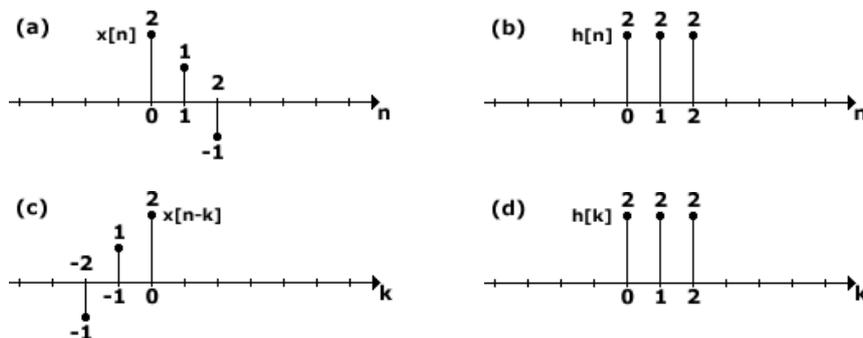


FIGURA 11 – Sinais preparados para uso no exemplo de convolução discreta com sinais finitos.

No instante $n = -1$, apresentado pela Figura 12(a), ainda não ocorreu a sobreposição dos sinais, resultando em valor 0 para a convolução.

A Figura 12(b) apresenta a situação dos sinais no instante $n = 0$, ocorrendo a convolução com uma amostra. Efetuando o somatório dos produtos parciais obtém-se a convolução para este instante, sendo $y[0] = 4$. As Figuras 12(c), 12(d), 12(e) e 12(f) apresentam os demais instantes onde ocorre a convolução com $y[1] = 6$, $y[2] = 4$, $y[3] = 0$ e $y[4] = -2$. No instante $n = 5$, apresentado pela Figura 12(g), a convolução terminou, não havendo sobreposição de amostras dos sinais.

Como era esperado, observa-se que o resultado da convolução com esta abordagem apresenta o mesmo resultado que as duas abordagens anteriores.

Vê-se nesta abordagem, diferente das duas anteriores, que o resultado da convolução para cada instante é obtido realizando-se a convolução naquele instante, independente do cálculo da convolução nos instantes anteriores e posteriores. Essa é uma característica da abordagem que permite operar com sinais com muitas amostras ou com sinais infinitos e calcular a operação de convolução para cada instante de tempo discreto n .

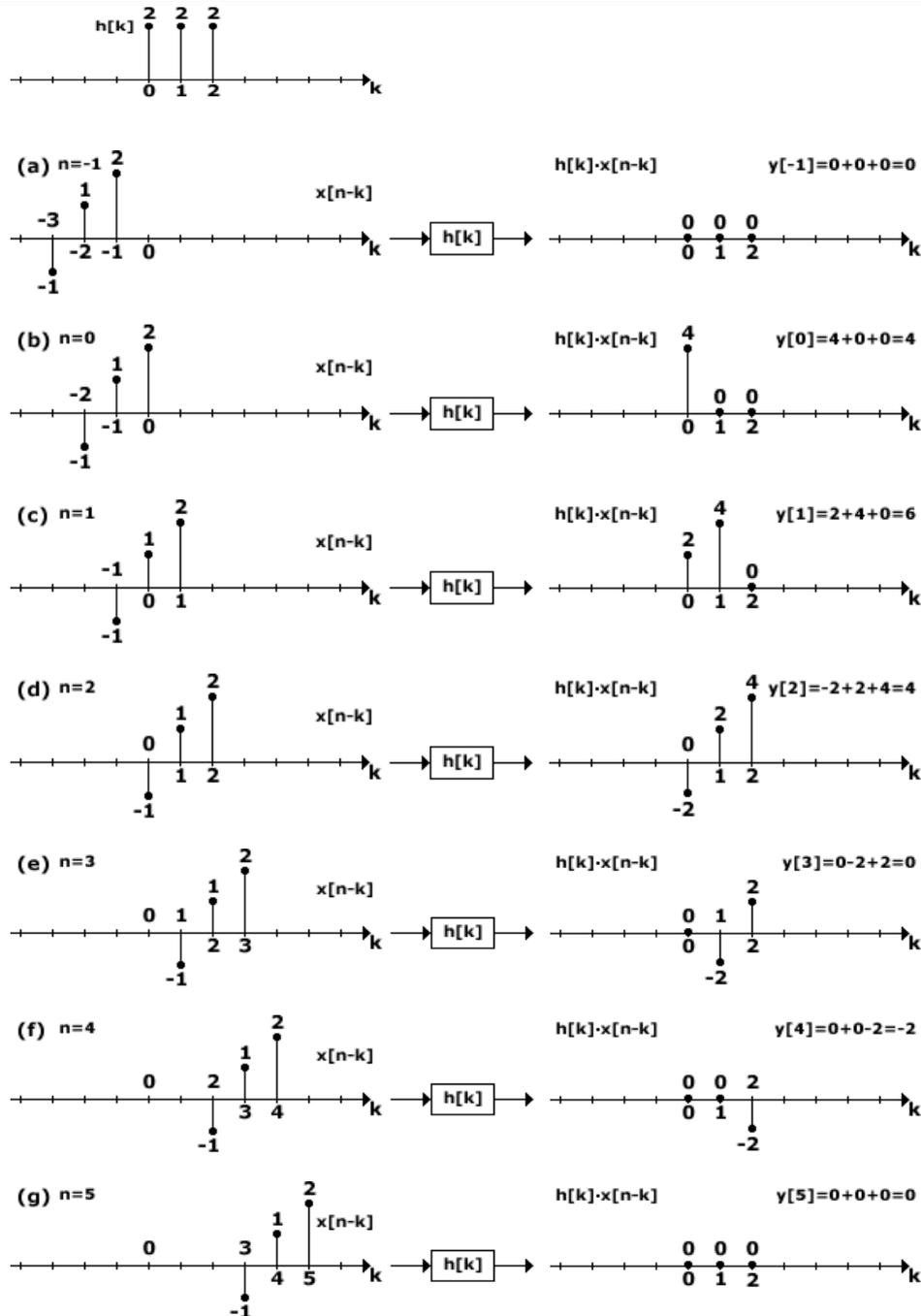


FIGURA 12 – Operação de convolução com sinais discretos finitos, realizada utilizando a definição de convolução discreta.

Lathi (2004) e Hayes (1999) apresentam um artifício criativo, através de uma tira de papel, para agilizar a realização da operação para sinais discretos fazendo uso da definição de convolução. Fica a indicação para o leitor interessado.

4.3. Convolução de sinal discreto finito com sinal discreto infinito

A convolução de um sinal discreto finito com um sinal discreto infinito pode ser resolvida pela definição da convolução discreta ou pela ideia da resposta impulsiva.

As funções exemplo estão apresentadas nas Equações 42 e 43 e os comportamentos das funções nas Figuras 13(a) e 13(b).

$$h[n] = u[n] - u[n - 4] \quad [42]$$

$$x[n] = 0,9^n \cdot u[n] \quad [43]$$

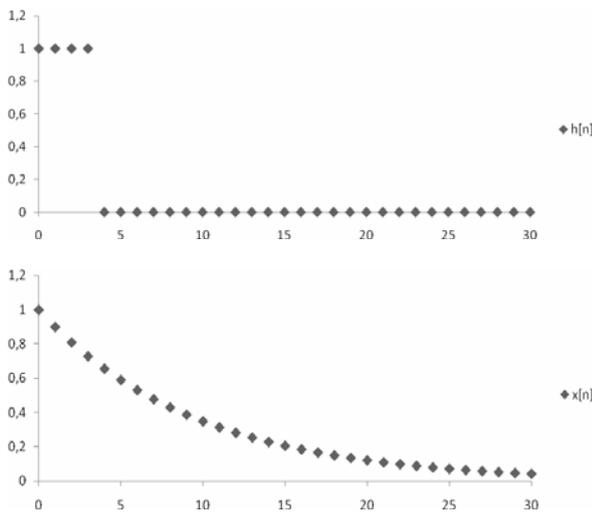


FIGURA 13 – Sinais discretos finito $h[n]$ e infinito $x[n]$, das Equações 42 e 43.

Aplicando a definição da convolução discreta, observa-se que a função $h[n]$ é composta por uma sequência finita de impulsos unitários, definindo duas análises. No intervalo $0 \leq n \leq 3$ tem-se uma análise para a convolução, e no intervalo $n \geq 3$, tem-se outra análise, conforme apresenta a Equação 44.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0,9^k u[k] \cdot \{u[n - k] - u[n - k - 4]\}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n 0,9^k, \quad 0 \leq n \leq 3$$

$$y[n] = \frac{1 - 0,9^{n+1}}{1 - 0,9}, \quad 0 \leq n \leq 3$$

$$y[n] = \sum_{k=n-3}^n 0,9^k, \quad n \geq 3$$

$$y[n] = \left(\frac{1 - 0,9^4}{1 - 0,9} \right) \cdot 0,9^{n-3}, \quad n \geq 3 \quad [44]$$

O resultado da convolução, da Equação 44, é apresentado pela Figura 14.

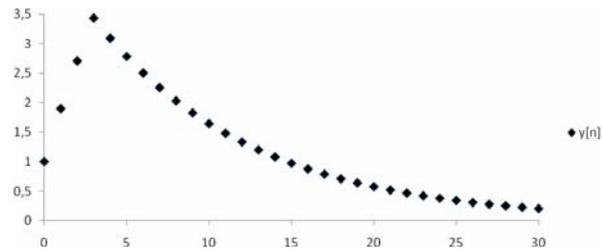


FIGURA 14 – Comportamento da convolução $y[n]$ entre o sinal discreto finito e o sinal discreto infinito, apresentados pela Figura 13.

Como o sinal $h[n]$ possui um número pequeno de amostras, a convolução discreta pela abordagem da resposta impulsiva também pode ser aplicada neste exemplo.

5. TRANSFORMADAS

Após apresentar a definição e exemplos da operação de convolução para sinais de tempo contínuo e de tempo discreto, não é possível dizer que a convolução seja uma operação simples de ser entendida e de ser executada, também não é difícil, mas é trabalhosa.

Outra abordagem matemática para resolver a operação de convolução é o uso das transformadas, que estão relacionadas com a solução do problema em outro domínio de representação.

A aplicação das transformadas neste contexto é para obter o resultado da operação de convolução, sem resolvê-la diretamente. Através das transformadas, transporta-se o problema para um outro domínio de representação, no qual a operação de convolução também será transformada, possuindo uma solução algébrica mais simples. Dependendo do tipo do sinal que está sendo utilizado e da aplicação, determina-se qual a transformada a ser utilizada: transformada de Laplace, transformada de Fourier ou transformada Z.

5.1. Transformada de Laplace e a convolução

A transformada de Laplace relaciona dois domínios de representação: domínio do tempo contínuo t e domínio da frequência complexa s ,

sendo s uma variável complexa ($s = \sigma + j\omega$) (operador imaginário: $j = i = \sqrt{-1}$).

A transformada de Laplace, definida na Equação 45, transforma a função do domínio do tempo $x(t)$, para o domínio da frequência, resultando na função $X(s)$.

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \quad [45]$$

A antitransformada de Laplace ou transformada inversa de Laplace, definida na Equação 46, transforma a função $X(s)$ do domínio da frequência, para o domínio do tempo, resultando na função $x(t)$.

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$$

$$L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) \cdot e^{s \cdot t} \cdot ds \quad [46]$$

Dentre as propriedades da transformada de Laplace, limitando-se ao contexto deste trabalho, destacam-se as duas propriedades envolvendo a operação de convolução.

A propriedade da convolução no domínio do tempo é apresentada pela Equação 47. A operação de convolução de duas funções no domínio do tempo é transformada para o domínio da frequência como sendo a multiplicação entre as transformadas das funções.

$$x(t) * w(t) \xrightarrow{L} X(s) \cdot W(s) \quad [47]$$

A propriedade dual é a propriedade da convolução no domínio da frequência, apresentada pela Equação 48. A operação de convolução entre duas funções no domínio da frequência é transformada para o domínio do tempo como sendo a multiplicação das transformadas inversas destas funções.

$$x(t) \cdot w(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot X(s) * W(s) \quad [48]$$

Nas duas propriedades, observa-se que a operação de convolução realizada num domínio transforma-se na operação de multiplicação no outro domínio. Desta forma, para não resolver diretamente a operação de convolução, executa-se a transformada dos sinais para o outro domínio, resolve-se o problema e retorna-se a solução para o domínio inicial executando a transformada inversa.

5.2. Transformada de Fourier e a convolução

A transformada de Fourier relaciona o domínio do tempo contínuo t com o domínio da frequência $j\omega$ (operador imaginário: $j = i = \sqrt{-1}$).

A definição da transformada de Fourier é apresentada pela Equação 49, transformando a

função do domínio do tempo $x(t)$ para o domínio da frequência, resultando na função $X(j\omega)$.

$$X(j\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \quad [49]$$

A transformada inversa de Fourier ou anti-transformada, definida na Equação 50, transforma a função $X(j\omega)$ do domínio da frequência, para o domínio do tempo, obtendo a função $x(t)$.

$$x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\}$$

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega \quad [50]$$

Destacam-se apenas as duas propriedades da transformada de Fourier que envolvem a operação de convolução.

A propriedade da convolução no domínio do tempo é apresentada pela Equação 51. A operação de convolução de duas funções no domínio do tempo é transformada para o domínio da frequência como sendo a operação de multiplicação entre as transformadas das funções.

$$x(t) * w(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) \cdot W(j\omega) \quad [51]$$

A propriedade dual é a propriedade da convolução no domínio da frequência, apresentada pela Equação 52. A operação de convolução entre duas funções no domínio da frequência é transformada para o domínio do tempo como sendo a multiplicação das transformadas inversas destas funções.

$$x(t) \cdot w(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot X(j\omega) * W(j\omega) \quad [52]$$

Nas duas propriedades, observa-se que a operação de convolução realizada num domínio transforma-se na operação de multiplicação no outro domínio. Desta forma, para não resolver diretamente a operação de convolução, executa-se a transformada dos sinais para o outro domínio, resolve-se o problema e retorna-se com a solução para o domínio inicial executando a transformada inversa.

5.3. Transformada Z e a convolução

A transformada Z é a transformada equivalente da transformada de Laplace operando em tempo discreto sobre funções e variáveis discretas. A definição da transformada é apresentada pela Equação 53, com $z = r \cdot e^{j\omega}$, sendo z uma variável complexa (operador imaginário: $j = i = \sqrt{-1}$).

$$X[z] = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \quad [53]$$

Semelhante às outras transformadas apresentadas, a propriedade de interesse envolve a operação de convolução. A propriedade da convolução mostra que a operação de convolução de duas funções no domínio do tempo discreto é transformada para o domínio Z como uma operação de multiplicação entre as transformadas das funções, conforme apresenta a Equação 54.

$$x[n] * w[n] \xrightarrow{Z} X[z] \cdot W[z] \quad [54]$$

6. REALIZANDO A CONVOLUÇÃO COM TRANSFORMADAS

Este item apresenta a operação de convolução resolvida através das transformadas de Laplace, de Fourier e Z. A propriedade da convolução dos sinais no tempo corresponde ao produto das transformadas dos sinais. Para fazer uso desta propriedade, determinam-se as transformadas dos sinais, representando o problema no domínio da transformada. Fazendo uso da convolução executa-se o produto das transformadas e determina-se a transformada inversa com a solução da convolução.

6.1. Convolução com a transformada de Laplace

Fazendo uso dos mesmos exemplos de sinais contínuos infinitos que foram utilizados na Figura 2, realiza-se a operação de convolução através da transformada de Laplace.

Nas Equações 55 e 56, apresentam-se as funções exemplo a serem convoluídas. As Equações 57, 58 e 59 apresentam um par de transformada de Laplace e duas propriedades. As propriedades de linearidade e de convolução e o par de transformada de Laplace podem ser encontrados nas referências.

$$x(t) = 2 \cdot e^{-t} \cdot u(t) \quad [55]$$

$$h(t) = e^{-3t} \cdot u(t) \quad [56]$$

$$e^{-at} \cdot u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+a} \quad [57]$$

$$a \cdot x(t) + b \cdot w(t) \xrightarrow{L} a \cdot X(s) + b \cdot W(s) \quad [58]$$

$$x(t) * w(t) \xrightarrow{L} X(s) \cdot W(s) \quad [59]$$

Aplicando-se as propriedades e a transformada nos sinais no domínio do tempo, obtém-se a transformada de Laplace dos sinais nas Equações 60 e 61.

$$X(s) = \frac{2}{s+1} \quad [60]$$

$$H(s) = \frac{1}{s+3} \quad [61]$$

O resultado da convolução utilizando a transformada de Laplace é caracterizado pelo produto das Equações 60 e 61, apresentado na Equação 62. Utilizando a ferramenta de frações parciais (ver Lathi, 2004) na Equação 62, decompõe-se a fração do polinômio de segundo grau em duas frações de polinômios de primeiro grau (Equação 63), que possuem como transformada inversa o par de transformada da Equação 57.

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1) \cdot (s+3)} \quad [62]$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+3} \quad [63]$$

O resultado obtido na Equação 63 está no domínio da transformada de Laplace e deve ser convertido para o domínio do tempo, resultando na função $y(t)$, utilizando-se o procedimento do cálculo da transformada inversa na Equação 64.

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+3}\right\}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+3}\right\}$$

$$y(t) = e^{-t} \cdot u(t) - e^{-3t} \cdot u(t)$$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-3t}) \cdot u(t) \quad [64]$$

Como foram utilizadas as mesmas funções da Figura 2, é esperado obter o mesmo resultado para a convolução. Os gráficos dos sinais $x(t)$, $h(t)$ e do resultado $y(t)$ podem ser visualizados na Figura 3.

Observa-se que não foi necessário o apoio de nenhum gráfico para resolver a convolução utilizando-se a transformada de Laplace, e que devido ao uso das propriedades, a convolução no domínio do tempo contínuo foi transformada em uma multiplicação no domínio da frequência.

6.2. Convolução com a transformada de Fourier

Utilizando os mesmos exemplos de sinais contínuos infinitos que foram utilizados na Figura 2, realiza-se a operação de convolução através da transformada de Fourier.

Nas Equações 65 e 66, apresentam-se as funções exemplo a serem convoluídas. As Equações 67, 68 e 69 apresentam um par de transformada de Fourier e duas propriedades. As propriedades de linearidade e de convolução e o par de transformada de Fourier podem ser encontrados nas referências.

$$x(t) = 2 \cdot e^{-t} \cdot u(t) \quad [65]$$

$$h(t) = e^{-3t} \cdot u(t) \quad [66]$$

$$e^{-at} \cdot u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a + j \cdot \omega} \quad [67]$$

$$a \cdot x(t) + b \cdot w(t) \xleftrightarrow{F} a \cdot X(j\omega) + b \cdot W(j\omega) \quad [68]$$

$$x(t) * w(t) \xleftrightarrow{L} X(j\omega) \cdot W(j\omega) \quad [69]$$

Aplicando-se as propriedades e a transformada nos sinais no domínio do tempo, obtém-se a transformada de Fourier dos sinais nas Equações 70 e 71.

$$X(j\omega) = \frac{2}{1 + j \cdot \omega} \quad [70]$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{3 + j \cdot \omega} \quad [71]$$

O resultado da convolução no domínio da transformada de Fourier é caracterizado pelo produto das Equações 70 e 71, apresentado na Equação 72. Utilizando-se a ferramenta de frações parciais (Lathi, 2004) na Equação 72, decompõe-se a fração do polinômio de segundo grau em duas frações de polinômios de primeiro grau (Equação 73), que possuem como transformada inversa o par de transformada da Equação 67.

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{2}{(1 + j \cdot \omega) \cdot (3 + j \cdot \omega)} \quad [72]$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \omega} + \frac{-1}{3 + j \cdot \omega} \quad [73]$$

O resultado obtido na Equação 73 está no domínio da transformada de Fourier e deve ser convertido para o domínio do tempo, resultando na função $y(t)$, utilizando-se o procedimento do cálculo da transformada inversa na Equação 74.

$$y(t) = F^{-1}\{Y(j\omega)\}$$

$$y(t) = F^{-1}\left\{\frac{1}{1 + j \cdot \omega} + \frac{-1}{3 + j \cdot \omega}\right\}$$

$$y(t) = F^{-1}\left\{\frac{1}{1 + j \cdot \omega}\right\} + F^{-1}\left\{\frac{-1}{3 + j \cdot \omega}\right\}$$

$$y(t) = e^{-t} \cdot u(t) - e^{-3t} \cdot u(t)$$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-3t}) \cdot u(t) \quad [74]$$

Como foram utilizadas as mesmas funções da Figura 2, é esperado obter o mesmo resultado para a convolução. Os gráficos dos sinais $x(t)$, $h(t)$ e do resultado $y(t)$ podem ser visualizados na Figura 3.

Observa-se que não foi necessário o apoio de nenhum gráfico para resolver a convolução através do uso da transformada de Fourier. Devido ao uso da propriedade de convolução no domínio do tempo a convolução no tempo contínuo foi transformada em uma multiplicação no domínio da frequência. Mas para resolver a convolução pela transformada de Fourier é necessário utilizar a tabela de pares de transformadas de Fourier e a tabela de propriedades, que podem ser encontrados nas referências.

6.3. Convolução com a transformada Z

Utilizando os mesmos sinais discretos infinitos das Equações 24 e 25, realiza-se a operação de convolução através da transformada Z. As Equações 75 e 76 apresentam as funções a serem convoluídas. As Equações 77, 78 e 79 apresentam um par de transformada Z e duas propriedades (linearidade e convolução). As propriedades e o par de transformada Z podem ser encontrados nas referências.

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n] \quad [75]$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n] \quad [76]$$

$$a^n \cdot u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z - a} \quad [77]$$

$$a \cdot x[n] + b \cdot w[n] \xleftrightarrow{Z} a \cdot X(z) + b \cdot W(z) \quad [78]$$

$$x[n] * w[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \cdot W(z) \quad [79]$$

Aplicando-se as propriedades e a transformada nos sinais no domínio do tempo, obtém-se a transformada Z dos sinais nas Equações 80 e 81.

$$X(z) = \frac{z}{z - 1/4} \quad [80]$$

$$H(z) = \frac{z}{z - 1/3} \quad [81]$$

O resultado da convolução em Z é caracterizado pelo produto das Equações 80 e 81, apresentado na Equação 82. Utilizando-se a ferramenta de frações parciais (ver Lathi, 2004) na Equação 82, decompõe-se a fração do polinômio de segundo grau em duas frações de polinômios de primeiro grau (Equação 83), que possuem como transformada inversa o par de transformada da Equação 77.

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(z - \frac{1}{3}\right)} \quad [82]$$

$$Y(z) = \frac{-3 \cdot z}{z - 1/4} + \frac{4 \cdot z}{z - 1/3} \quad [83]$$

O resultado obtido na Equação 83 está no domínio da transformada Z e deve ser convertido para o domínio do tempo discreto, resultando na função $y[n]$, utilizando-se o procedimento do cálculo da transformada inversa na Equação 84.

$$y[n] = Z^{-1}\{Y(z)\}$$

$$y[n] = Z^{-1}\left\{\frac{-3 \cdot z}{z - 1/4} + \frac{4 \cdot z}{z - 1/3}\right\}$$

$$y[n] = Z^{-1}\left\{\frac{-3 \cdot z}{z - 1/4}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{4 \cdot z}{z - 1/3}\right\}$$

$$y[n] = -3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n] + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n]$$

$$y[n] = \left[4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \cdot u[n] \quad [84]$$

Como foram utilizadas as mesmas funções das Equações 24 e 25, é esperado obter-se o mesmo resultado para a convolução. O resultado da convolução obtido na Equação 32 coincide com o resultado obtido na Equação 84.

Observa-se que não foi necessário o apoio de nenhum gráfico para resolver a convolução através

do uso da transformada Z, e devido ao uso da propriedade de convolução no domínio do tempo a convolução no tempo discreto foi transformada em uma multiplicação no domínio Z. Porém, para resolver a convolução pela transformada Z, é necessário utilizar a tabela de pares de transformadas Z e a tabela de propriedades, disponíveis nas referências.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A operação de convolução é muito utilizada em processamento de sinais na engenharia elétrica, sendo abordada em uma disciplina introdutória de sinais e sistemas e amplamente utilizada em disciplinas de controle, teoria de comunicações e processamento de sinais.

Neste trabalho foi abordada a convolução em tempo contínuo e a convolução em tempo discreto, por serem as mais comumente utilizadas.

Através de exemplos numéricos pode-se observar que a operação de convolução não é uma operação fácil de ser executada, mesmo utilizando-se sinais ou funções elementares ou simples.

Foi observado também que, para os tipos de sinais apresentados, a convolução pode ser resolvida pela sua definição matemática, pela integral de convolução ou soma de convolução, dependendo do sinal ser de tempo contínuo ou de tempo discreto.

Através de exemplos numéricos foram abordados diversos métodos para resolver a operação de convolução, procurando apresentar a diversidade de ferramentas matemáticas disponíveis. Para determinados tipos de sinais, além da solução pela definição da operação, a convolução pode ser resolvida por outras abordagens, como a resposta impulsiva do sistema.

O uso das transformadas de Laplace ou de Fourier, para sinais de tempo contínuo, ou da transformada Z, para sinais de tempo discreto, permite, através das suas propriedades, transformar a operação de convolução em uma operação de multiplicação, facilitando e agilizando a resolução da convolução.

Como já citado, a operação de convolução é a operação mais utilizada em processamento de sinais. Por isso é importante compreender e saber resolver esta operação, independente da ferramenta matemática utilizada.

REFERÊNCIAS

HAYES, M.H. **Schaum's outline: digital signal processing**. The McGraw-Hill Companies: New York, 1999.

LATHI, B.P. **Linear systems and signals**. Oxford University Press, 2a ed., 2004.